

«أختبر معلوماتي قبل البدء بدراسة الوحدة، وفي حال عدم تأكدي من الإجابة أستعين بالمثل المعطى.»

استعمال المتباينات الخطية بمتغيرين للتعبير عن موقف حياتي



(1) **نجارة:** إذا علمت أن نجارًا يريد شراء نوعين من الخشب، لا يزيد ثمنهما الكلي على 72 JD ، ووجد أن ثمن المتر الطولي من النوع الأول 4 JD ، ومن النوع الثاني 6 JD ، فأكتب متباينة خطية بمتغيرين تمثل كمية الخشب التي يمكن للنجار شراؤها من كل نوع.

(2) **تسوق:** تريد سامية شراء عنب وتفاح، بحيث لا يزيد المبلغ الذي تدفعه ثمناً لكلا النوعين على 6 JD . إذا كان ثمن الكيلوغرام الواحد من العنب 1.5 JD ، وثن الكيلوغرام الواحد من التفاح 1 JD ، فأكتب متباينة خطية بمتغيرين تمثل عدد الكيلو غرامات التي يمكن السامية أن تشتريها من كل نوع



مثال

حقائب يصنع جمال حقائب كبيرة وأخرى صغيرة للسيدات؛ كي يبيعها في معرض الحرف اليدوية، وهو يحتاج إلى 3 أيام لصنع الحقيبة الصغيرة، و5 أيام لصنع الحقيبة الكبيرة. أكتب متباينة خطية بمتغيرين تمثل عدد الحقائب التي يمكن لجمال صنعها من كل نوع في 30 يوماً حداً أقصى قبل يوم افتتاح المعرض.



رموز المتباينات				
الرمز	<	>	≤	≥
بالكلمات	<ul style="list-style-type: none"> أقل من أصغر من يقل عن 	<ul style="list-style-type: none"> أكبر من يزيد على أكثر من 	<ul style="list-style-type: none"> أصغر من أو يساوي أقل من أو يساوي على الأكثر لا يزيد على 	<ul style="list-style-type: none"> أكبر من أو يساوي أكثر من أو يساوي لا يقل عن على الأقل

تمثيل معادلة خطية بمتغيرين في المستوى الإحداثي



« أمثل كلا من المعادلات الآتية في المستوى الإحداثي:

$$\textcircled{3} x - 2y = 10$$

$$\textcircled{4} 3x + y = 27$$

$$\textcircled{5} -7x - 2y = 14$$



امثل المعادلة $2x + 3y = 6$ في المستوى الإحداثي :

مثال

حل نظام مكون من معادلتين خطيتين بطريقة الحذف



«» أحل أنظمة المعادلات الخطية الآتية بطريقة الحذف

$$\textcircled{6} \quad x + y = 5$$

$$x - y = 1$$

$$\textcircled{7} \quad 2x + y = 9$$

$$x - y = 0$$

$$\textcircled{8} \quad x - y = 5$$

$$x + 2y = -1$$



أحل نظام المعادلات الخطية الآتي بطريقة الحذف:

مثال

$$2x + y = 4$$

$$x + 3y = 7$$



تحديد إذا كان زوج مرتب يمثل حلاً لمتباينة خطية بمتغيرين



«أحدد إذا كان كل زوج مرتب مما يأتي يُمثل حلاً للمتباينة: $6 < 3y + x$ »

⑨ (0,1)

⑩ (-2,4)

⑪ (8, -1)

«أحدد إذا كان كل زوج مرتب مما يأتي يُمثل حلاً للمتباينة: $-3x + y < 7$ »

⑫ (-5,3)

⑬ (0,2)

⑭ (3,7)



أحدد إذا كان كل زوج مرتب مما يأتي يُمثل حلاً للمتباينة: $3x + y < 7$

مثال

a) (-3, 4)

b) (2, 4)

تمثيل المتباينات الخطية بمتغيرين بيانياً



«أمثل كلا من المتباينات الآتية في المستوى الإحداثي:»

⑮ $y \leq 3 - 2x$

$$\textcircled{16} \quad x + y < 11$$

$$\textcircled{17} \quad x - 2y < 0$$

$$\textcircled{18} \quad 4y - 8 \leq 0$$

$$\textcircled{19} \quad 3x - y \leq 6$$

$$\textcircled{20} \quad 2x + 5y \leq 10$$

21 $-4x + 6y > 24$

22 $y < 3x + 3$



أمثل المتباينة الخطية: $2y - x < 2$ في المستوى الإحداثي.

مثال

الدرس الأول: حل نظام متباينات خطية بمتغيرين بيانياً

Solving System of Linear Inequalities in Two Variables Graphically



❖ **مسألة اليوم:** قدم محل لتبديل زيوت السيارات عرضاً مجانياً لغسل

السيارات. إذا كان الحد الأقصى لذلك العرض هو غسل 30 سيارة

يوميًا، بتكلفة لا تزيد على 75 JD ، فكم سيارة كبيرة وصغيرة يمكن

غسلها يوميًا بحسب هذا العرض؟



تكلفة غسل السيارة
الصغيرة JD 2.



تكلفة غسل السيارة
الكبيرة JD 3.

يتكون نظام المتباينات الخطية (system of linear inequalities) من متباينتين خطيتين أو أكثر. ويُطلق على مجموعة الأزواج المرتبة التي تحقق جميع المتباينات اسم مجموعة الحل (solution set). فمثلاً، يتكون النظام الآتي من ثلاث متباينات خطية:

$$x + y < 2$$

المتباينة الخطية الأولى

$$-2x + y > -1$$

المتباينة الخطية الثانية.

$$x - 3y \leq -2$$

المتباينة الخطية الثالثة.

يمثل الزوج المرتب $(-1, 2)$ أحد حلول هذا النظام ؛ لأنه يحقق المتباينات جميعها.

$$-1 + 2 = 1 < 2$$

الزوج المرتب يحقق المتباينة الخطية الأولى

$$-2(-1) + 2 = 4 > -1$$

الزوج المرتب يحقق المتباينة الخطية الثانية

$$-1 - 3(2) = -7 \leq -2$$

الزوج المرتب يحقق المتباينة الخطية الثالثة

أتعلم

يوجد عدد لانهائي من الأزواج المرتبة التي تحقق هذا النظام، وليس $(-1, 2)$ فقط.

لغة الرياضيات

تدل جملة (الزوج المرتب يُحقق متباينة) على أن المتباينة تكون صحيحة عند تعويض هذا الزوج فيها.

لحل نظام متباينات، أمثل كل متباينة فيه بيانياً في المستوى الإحداثي نفسه، ثم أظلل المنطقة المشتركة بين مناطق حل المتباينات جميعها؛ إذ تمثل هذه المنطقة مجموعة حل النظام.



مثال 1

أمثل منطقة حل نظام المتباينات الآتي، ثم أتأكد من صحة الحل:

$$4x + 3y \leq 12$$

$$y - 2x < 0$$

أتذكر

يرمز إلى المجموعة الخالية بالرمز $\{\}$ ، أو الرمز \emptyset (تقرأ: فاي)؛ وهي مجموعة لا تحوي عناصر.

أتأكد من فهمي :



أمثل منطقة حل نظام المتباينات الآتي، ثم أتأكد من صحة الحل:

$$2x - 4y \geq -5$$

$$x + 7y < 7$$

لا يكون لنظام المتباينات حل أحياناً؛ لعدم وجود منطقة مشتركة بين مناطق حل المتباينات المكونة له، عندئذٍ تكون مجموعة الحل هي المجموعة الخالية.



أمثل منطقة حل نظام المتباينات الآتي:

مثال 2

$$2x - 4y \leq -2$$

$$x - 2y > 1$$

أتحقق من فهمي :



أمثل منطقة حل نظام المتباينات الآتي:

$$5x - 2y < 3$$

$$2.5x - y \geq 2$$

قد يحوي النظام أكثر من متباينتين، عندئذ تكون منطقة الحل هي المنطقة المشتركة بين مناطق حل المتباينات جميعها.



أمثل بيانياً منطقة حل نظام المتباينات الآتي:

مثال 3

$$x - y \geq 0$$

$$x + y < 8$$

$$x > 2$$

أتحقق من فهمي :



أمثل بيانياً منطقة حل نظام المتباينات الآتي:

$$-3x + 4y \geq 9$$

$$x - 5y > 6$$

$$2x - 5y < -3$$

تستعمل أنظمة المتباينات الخطية في عديد من المجالات والتطبيقات الحياتية، ويمكن بها تحديد القيم الممكنة للمتغيرات وفق شروط محددة.



من الحياة

مثال 4



نجارة: يريد نجار شراء نوعين من المسامير، ووجد أن ثمن الكيلوغرام الواحد من النوع الأول $JD\ 4$ ، ومن النوع الثاني $JD\ 6$. إذا أراد شراء ما لا يقل عن $10\ kg$ من النوعين ، بحيث لا يزيد الثمن الكلي على $JD\ 48$ ، فأجد مقدار ما يمكنه شراؤه من كل نوع.

أتحقق من فهمي :



محميات: يوجد في محمية للحيوانات مجموعة من الغزلان والأيائل، وقد أفاد الموظف الذي يشرف على إطعامها والاعتناء بها أن:

- في المحمية 6 حيوانات على الأقل.
- عدد الحيوانات في المحمية لا يزيد على 12 حيواناً.
- عدد الغزلان في المحمية أقل من عدد الأيائل.
- في المحمية اثنين من الغزلان على الأقل.
- (a) ما أقل عدد ممكن من الأيائل؟
- (b) ما أكثر عدد ممكن من الغزلان؟

أُتدرب وأحل المسائل



أمثل منطقة حل كل من أنظمة المتباينات الآتية:

مثال

① $x + 3y > 1$

$5x - y \leq 2$

② $-3x - 12y > -9$

$x + 4y \geq 5$

③ $x - 11y < 6$

$-2x + 22y > -12$

④ $3x + 5y \leq 1$

$3x + 5y \leq 3$

⑤ $2x - 7y > 2$

$2x - 7y \leq 2$

⑥ $13x - y < 11$

$x + y \geq 0$

⑦ $9x - y < 2$

$x + 3y > -1$

$x - y > -3$

⑧ $5x - 5y < 2$

$2x - 2y > 1$

$x \geq y$

⑨ $x \leq y$

$x - 5y < 6$

$10x - y > 3$



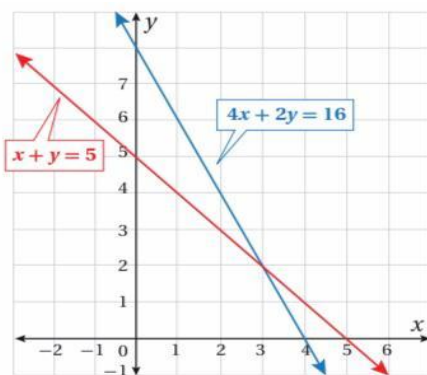
⑩ **سياحة:** تبلغ تكلفة تذكرة ركوب قارب سياحي دينارين للبالغين،

ودينارًا واحدًا للأطفال، ويتسع القارب لـ 10 أشخاص على الأكثر.

إذا كانت x تمثل عدد البالغين، و y تمثل عدد الأطفال، فكم شخصًا

من البالغين والأطفال قد يوجد على متن القارب، علمًا بأن ريع بيع التذاكر أقل من 12 JD ؟

⑪ **نقل جوي:** سعر تذكرة الدرجة السياحية للسفر بالطائرة بين مدينتي عمان والعقبة $JD\ 25$ ، وسعر تذكرة الدرجة الخاصة $JD\ 50$. إذا كان ريع بيع التذاكر $JD\ 1600$ على الأقل، وبيعت 50 تذكرة على الأكثر، فأجد عدد التذاكر الممكن لكل درجة.



⑫ أظلل منطقة حل النظام الآتي من المتباينات في الشكل المجاور،

ثم أكتب جميع حلول النظام الممكنة، علماً بأن x و y عدنان

صحيحان موجبان:

$$x + y \geq 5$$

$$4x + 2y \leq 16$$

13) جامعات: أرادت سامية الالتحاق بجامعة تشترط عقد امتحاني قبول لذلك؛ أحدهما في مبحث الرياضيات، والآخر في مبحث اللغة الإنجليزية، وإحراز ما بين 900 نقطة و 1200 نقطة في الامتحانين معاً؛ شرط ألا يقل المجموع في امتحان الرياضيات عن 600 نقطة، وألا يقل المجموع في امتحان اللغة الإنجليزية عن 200 نقطة.

أجد عدد النقاط من مضاعفات المئة، التي يتعين على سامية إحرازها في كل امتحان لتقبل في الجامعة.

14) مسألة اليوم: قدم محل لتبديل زيوت السيارات عرضاً مجانياً لغسل

السيارات. إذا كان الحد الأقصى لذلك العرض هو غسل 30 سيارة

يوميًا، بتكلفة لا تزيد على JD 75 ، فكم سيارة كبيرة وصغيرة يمكن

غسلها يوميًا بحسب هذا العرض؟



تكلفة غسل السيارة
الصغيرة 2 JD.



تكلفة غسل السيارة
الكبيرة 3 JD.

مهارات التفكير العليا



15) **تبرير:** أصف منطقة حل نظام المتباينات الآتي من دون تمثيلها بيانياً:

$$2x + y \leq 7$$

$$2x + y \geq 7$$



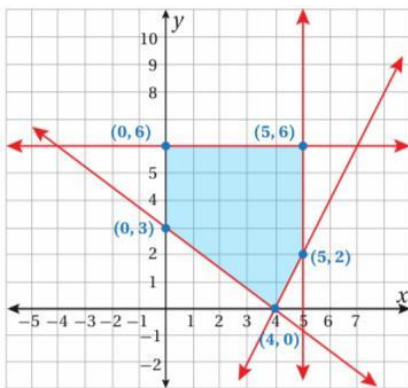
أكتب نظامين يتكون كل منهما من متباينتين خطيتين بمتغيرين، بحيث تكون مجموعة الحل:

مسألة مفتوحة

16) واقعة في الربع الأول من المستوى الإحداثي.

17) المجموعة الخالية.

18) **تحديد:** أكتب نظام المتباينات الذي منطقة حله هي المنطقة المظللة في التمثيل البياني الآتي:



كتاب التمارين

أمثل منطقة حل كل من أنظمة المتباينات الآتية، ثم أتحقق من صحة الحل:



$$\textcircled{1} 7x - 5y > 1$$

$$x + 3y < 1$$

$$\textcircled{2} -8x - 5y \leq -3$$

$$2x + 7y < 6$$

$$\textcircled{3} 4x - 8y \geq 5$$

$$-2y + x < -3$$

$$\textcircled{4} 9x + 3y \leq 6$$

$$3x + y \geq 2$$

$$\textcircled{5} -x - y \leq 2$$

$$7x - 6y \geq 4$$

$$2x + 5y > 4$$

$$\textcircled{6} 9x + y < 8$$

$$4x + 3y \geq 6$$

$$-8x + y \geq -5$$

$$\textcircled{7} x - 3y < 1$$

$$2x - 6y \geq 5$$

$$4x - 12y \geq 9$$

$$\textcircled{8} -6x - 3y \geq -12$$

$$3x + \frac{3}{2}y \geq 6$$

$$x + \frac{1}{2}y \leq 2$$

عمل خيري: مع حاتم 20 ديناراً، أراد أن يشتري بها نوعين من وجبات الإفطار في شهر رمضان للتصدق بها، فوجد أن سعر النوع الأول (A) هو 1.5 دينار، وسعر النوع الثاني (B) هو ديناران، وقد قرر شراء أكثر من 9 وجبات من كلا النوعين:

9 أكتب نظام المتباينات الخطية الذي يمثل عدد الوجبات التي يمكن لحاتم شراؤها من كلا النوعين.

10 أمثل نظام المتباينات بيانياً.

11 أجد ثلاثة حلول ممكنة لنظام المتباينات الآتي:

$$x + y \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$x \geq 0$$

الدرس الثاني: البرمجة الخطية Linear Programming



نوع شتلة البندورة	A	B
الثمن بالدينار	0.2	0.3
أقل إنتاج متوقع	4kg	5kg

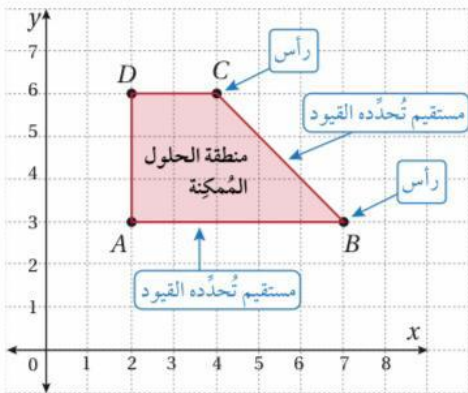
مسألة اليوم: دخلت سلمى محلاً لبيع الأشتال، وأرادت شراء نوعين من شتلات البندورة، بما لا يزيد على 4 JD ثمناً لـ 15 شتلة على الأكثر. وقد أظهرت اللوحة المجاورة المعلقة داخل المحل معلومات عن النوعين. كم شتلة ستشتري سلمى من كل نوع لإنتاج أكبر كم ممكن من البندورة؟

البرمجة الخطية (linear programming) هي طريقة تعتمد التمثيل البياني في المستوى الإحداثي لإيجاد أكبر قيمة ممكنة (قيمة عظمى)، أو أصغر قيمة ممكنة (قيمة صغرى) لاقتزان يُسمى الاقتزان الهدف (*objective function*)، ضمن مجموعة قيود (*constraints*)، يُمثل كل منها متباينة خطية. فبتمثيل المتباينات الخطية (القيود) تتحدد منطقة حل مشتركة لها تسمى منطقة الحلول الممكنة (*feasible region*)، وفيها تتحقق أكبر قيمة ممكنة أو أصغر قيمة ممكنة للاقتزان الهدف عند رؤوس المضلع الذي يُحدد منطقة الحلول الممكنة.

إرشاد

سيقتصر هذا الدرس فقط على البرمجة الخطية بمتغيرين.

تعرف البرمجة الخطية بمتغيرين أيضاً بأنها طريقة البحث عن الحل الأمثل (*optimal solution*)، وتتكون مسألتها مما يأتي:



① **الاقتزان الهدف:** يكون في صورة: $P = ax + by$ ، حيث:

P : اسم الاقتزان (مثل الربح).

a, b : عدنان حقيقيان x, y : متغيران

② **القيود:** نظام من المتباينات الخطية، وهي تكتب بدلالة

المتغيرين x, y ، وتحدد منطقة الحلول الممكنة كما في الشكل المجاور.

مفهوم أساسي:

إذا وجدت قيمة عظمى أو قيمة صغرى للاقتزان الهدف، فإنها تكون عند واحد أو أكثر من رؤوس منطقة الحلول الممكنة.



أجد إحداثيي النقطة (x, y) التي تجعل الاقتران: $P = 3x + 2y$ أكبر ما يمكن ضمن القيود الآتية:

مثال 1

$$x - y \leq 1$$

$$x + 2y \leq 4$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

أتحقق من فهمي :



أجد إحداثيي النقطة (x, y) التي تجعل الاقتران: $T = 4x + 5y$ أكبر ما يمكن ضمن القيود الآتية:

$$x + 2y \leq 16$$

$$3x + 2y \leq 24$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

يسعى القائمون على الشركات الصناعية والتجارية ومختلف الأعمال إلى تخفيض الكلفة وزيادة الإنتاجية وتحقيق أكبر ربح ممكن، لكن ذلك يخضع لقيود ومحددات، مثل: التمويل، وعدد العمال، وعدد ساعات العمل، وعوامل العرض والطلب، وغير ذلك من المتغيرات.

لحل هذا النوع من المسائل، أستعمل البرمجة الخطية، وذلك باتباع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: صياغة الفرضيات، وكتابة اقتران الهدف الذي يراد إيجاد قيمته العظمى أو قيمته الصغرى، ثم تحديد القيود.

الخطوة 2: تمثيل نظام المتباينات بيانيًا، ثم تظليل منطقة الحلول الممكنة.

الخطوة 3: تحديد إحداثيات رؤوس منطقة الحلول الممكنة، وذلك بإيجاد نقاط تقاطع المستقيمات الحدودية عند تلك الرؤوس.

الخطوة 4: اختيار القيمة العظمى أو القيمة الصغرى وفقًا لما هو مطلوب في المسألة، وذلك بتعويض إحداثيات الرؤوس في اقتران الهدف.



من الحياة

مثال 2

يبيع متجر نوعين من أجهزة الحاسوب المحمولة، تكلفة الجهاز الواحد من النوع الأول $JD\ 250$ ، وتكلفة الجهاز الواحد من النوع الثاني $JD\ 400$. يحقق الجهاز الواحد من النوع الأول ربحًا مقداره $JD\ 45$ ، في حين يحقق الجهاز الواحد من النوع الثاني ربحًا مقداره $JD\ 50$. قدر صاحب المتجر أن إجمالي الطلب الشهري على الأجهزة لا يتجاوز 250 جهازًا، وبين عدم قدرته على استثمار أكثر من $JD\ 70000$ في المتجر. كم عدد الأجهزة التي يتعين على صاحب المتجر توفيرها للزبائن من كل نوع لتحقيق أكبر ربح ممكن؟

يُنتج مشغل صغير للأثاث المعدني 36 خزانة على الأكثر أسبوعيًا من نوعين مختلفين: A, B . يبلغ ربح الخزانة الواحدة من النوع A 35 JD، ومن النوع B 45 JD. إذا كان ما يباع من النوع A لا يقل عن 3 أمثال ما يباع من النوع B ، فأجد عدد الخزائن التي ينتجها المشغل من كل نوع لتحقيق أكبر ربح ممكن.

ألاحظ من المثالين السابقين أن منطقة الحل الممكنة التي تحددها القيود كانت محدودة، لكن بعض المسائل الحياتية تتضمن إيجاد أقل تكلفة ممكنة، أو أقل كمية مستهلكة وغير ذلك، فتكون منطقة الحل عندئذ غير محدودة؛ لأن قيودها تفرض ذلك.



	النوع 1	النوع 2
تكلفة الكيس الواحد	JD 10	JD 12
عدد وحدات البروتينات	40	30
عدد وحدات المعادن	20	20
عدد وحدات الفيتامينات	10	30

من الحياة

مثال 3

يخلط بعض مربّي الماشية نوعين من العلف للحصول على مزيج ذي تكلفة أقل. ويبين الجدول المجاور تكلفة الكيس الواحد من كل نوع، وعدد الوحدات التي يحويها من البروتينات والمعادن والفيتامينات.

إذا احتاجت الماشية يوميًا إلى 150 وحدة من البروتينات، و 90 وحدة من المعادن، و 60 وحدة من الفيتامينات على الأقل، فكم كيسًا من النوع 1 والنوع 2 معًا يمكن أن تستهلكه الماشية بأقل تكلفة ممكنة؟

أتحقق من فهمي :



	النوع 1	النوع 2
سعر العلبة الواحدة	JD 0.25	JD 0.3
عدد السرعات الحرارية	60	60
عدد وحدات فيتامين A	12	6
عدد وحدات فيتامين C	10	30

حمية غذائية: يشترط نظام للحمية الغذائية توافر ما لا يقل

عن 300 سعرة حرارية، و36 وحدة من فيتامين A ،

و90 وحدة من فيتامين C ، ضمن الجزء السائل من الوجبة

الغذائية. ويبين الجدول المجاور تكلفة العلبة الواحدة من نوعين

مختلفين من الألبان، وعدد السرعات الحرارية، ووحدات فيتامين A وفيتامين C التي تحويها العلبة الواحدة. كم علبة من كل نوع يمكن أن يستهلكها يوميًا شخص يتبع نظام الحمية الغذائية، ويريد تحقيق شروطها بأقل تكلفة مالية ممكنة؟

أُتدرب وأحل المسائل

أجد إحداثيي النقطة (x, y) التي تجعل اقتران الهدف أكبر ما يمكن ضمن القيود المعطاة في كل مما يأتي:

① $P = 4x + 3y$

$$x + 2y \leq 4$$

$$x - y \leq 1$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

② $R = 10x + 7y$

$$0 \leq x \leq 60$$

$$0 \leq y \leq 60$$

$$5x + 6y \leq 420$$

③ $Z = 1.5x + y$

$$x + 3y \leq 15$$

$$4x + y \leq 16$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

أجد إحداثيي النقطة (x, y) التي تجعل اقتران الهدف أصغر ما يمكن ضمن القيود المعطاة في كل مما يأتي:

④ $Q = 4x + 5y$

$$x + y \geq 8$$

$$3x + 5y \geq 30$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

⑤ $C = 8x + 4y$

$$x + 2y \geq 4$$

$$3x + y \geq 7$$

$$2y - x \geq 7$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

⑥ $K = 25x + 35y$

$$8x + 9y \leq 7200$$

$$8x + 9y \geq 3600$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

زراعة:

النوع	أمونيا (وحدة)	نيترات (وحدة)	فوسفات (وحدة)
A	3	3	6
B	10	4	4

يباع في محل للوازم الزراعية نوعان من الأسمدة هما A, B ، ويبين الجدول المجاور مكونات الكيلوغرام الواحد من هذين السمادين: يريد مزارع أن يكون مزيجاً من السمادين يحتوي على 36 وحدة على الأقل فوسفات، و 24 وحدة على الأقل نيترات ، و 30 وحدة على الأقل أمونيا.

⑦ إذا كان ثمن الكيلوغرام من النوع A ديناراً واحداً، ومن النوع B 1.5 JD، فأكتب اقتران التكلفة ونظام متباينات يصف هذا الموقف.

⑧ أمثل منطقة حل نظام المتباينات ، وأجد إحداثيات رؤوسها.

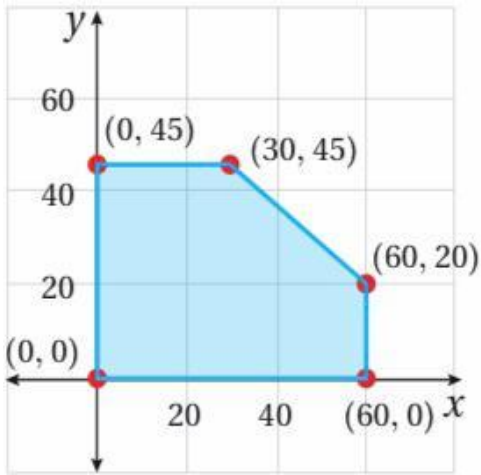
⑨ أجد عدد الكيلوغرامات التي يشتريها من كل نوع؛ ليحقق غايته بأقل تكلفة.

⑩ دعاية: أراد صلاح طباعة كتيبات ونشرات دعائية لتسويق منتجات مزرعته من العسل الطبيعي، بحيث يحوي الكتيب الواحد 3 صفحات ، وتحتوي النشرة الواحدة صفحتين. تبلغ تكلفة طباعة الكتيب الواحد 0.2 من الدينار، وتكلفة طباعة النشرة الواحدة 0.1 من الدينار. وقد قرر صلاح أنه بحاجة إلى طباعة ما لا يزيد على 600 صفحة ، ممثلة في 50 كتيبًا على الأقل، و 150 نشرة على الأقل. كم عدد الكتيبات والنشرات التي يجب طباعتها بحيث تكون التكلفة أقل ما يمكن؟

نوع شتلة البندورة	A	B
الثلث بالدينار	0.2	0.3
أقل إنتاج متوقع	4kg	5kg

⑪ مسألة اليوم: دخلت سلمى محلاً لبيع الأشتال، وأرادت شراء نوعين من شتلات البندورة، بما لا يزيد على 4 JD ثمنًا لـ 15 شتلة على الأكثر. وقد أظهرت اللوحة المجاورة المعلّقة داخل المحل معلومات عن النوعين. كم شتلة ستشتري سلمى من كل نوع لإنتاج أكبر كم ممكن من البندورة؟

مهارات التفكير العليا



(12) **تبرير:** أجد أكبر قيمة ممكنة لاقتران الهدف: $P = 5x + 6y$

ضمن منطقة الحلول الممكنة التي يمثلها الشكل المجاور،
وأبرر إجابتي، ثم أجد نقاطاً أخرى ضمن منطقة الحل يتحقق
عندها أكبر قيمة لاقتران الهدف، وأبرر إجابتي.

$$x + 2y \leq 8$$

$$x + y \leq 5$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

(13) **تحديد:** أجد اقتران هدف صورته: $G = ax + by$ ، حيث a, b عدنان

حقيقيان موجبان ، وله أكبر قيمة عند النقطة (2,3) وهي 18،

ضمن القيود المجاورة:

إرشاد: يوجد أكثر من إجابة.

$$x + 3y \leq 15$$

$$4x + y \leq 16$$

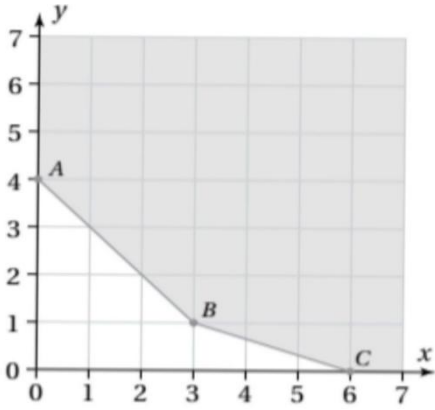
$$x \geq 0, y \geq 0$$

(14) **تحديد:** أجد مجموعة قيم n (حيث n عدد صحيح موجب) التي

تجعل لاقتران الهدف: $D = 3x + ny$

أكبر قيمة ممكنة عند النقطة (3,4) ، ضمن القيود المجاورة:

كتاب التمارين



① إذا كان التمثيل البياني للقيود الآتية كما في الشكل المجاور،

فأجد إحداثيي النقطة (x, y) تجعل الاقتران $Q = 4x + 2y$ اصغر ما يمكن:

$$x + y \geq 4$$

$$x + 3y \geq 6$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

② أجد إحداثيي النقطة (x, y) التي تجعل الاقتران $W = x + 2y$ أكبر ما يمكن ضمن القيود الآتية:

$$x + y \leq 20$$

$$2x + y \leq 30$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

القسم	النوع A	النوع B
التجميع	$2h$	$2h$
الدهان	$4h$	$1h$
التغليف	$1h$	$0.5h$

③ دراجات هوائية: ينتج مصنع نوعين من الدراجات الهوائية A.B.

ويبين الجدول المجاور عدد الساعات التي يستغرقها إنتاج كل من النوعين

في أقسام المصنع الثلاثة. إذا كان عدد ساعات العمل الأسبوعية في كل قسم

لا يزيد على $40h$ للتجميع، و $48h$ للدهان، و $13h$ للتغليف، وكان ربح الدراجة الواحدة المبيعة 45 دينارًا للنوع A ،

و 30 دينارًا للنوع B، فكم دراجة من كل نوع يتعين على المصنع إنتاجها أسبوعياً لتحقيق أكبر ربح ممكن؟

④ صالة زفاف: أرادت فاطمة دعوة 250 شخصاً إلى حفل زفاف، وتعين عليها استئجار طاولات ليجلس حولها المدعوون،

عرضت عليها صالة زفاف تأجيرها نوعين من الطاولات طاولات مستطيلة الشكل تتسع لـ 6 أشخاص وتبلغ تكلفة استئجارها

28 ديناراً، وطاولات دائرية الشكل تتسع لـ 10 أشخاص، وتبلغ تكلفة استئجارها 52 ديناراً. إذا كانت الصالة تسع 35

طاولة من كلا النوعين على الأكثر، وكان أكبر عدد يمكن توفيره من الطاولات المستطيلة الشكل 15 طاولة، فما عدد

الطاولات التي يمكن لفاطمة استئجارها من كلا النوعين بأقل تكلفة ممكنة؟



أختار رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

① الزوج الذي يمثل حلا لنظام المتباينات الآتي هو:

$$y + 5x < 7$$

$$2x - y \geq -3$$

a) (3,2)

b) (0,0)

c) (-4, -2)

d) (2,8)

② إذا كان لنظام متباينات خطية منطقة حل محدودة ، رؤوسها هي: $P(0,2), Q(2,3), R(4,2), S(3,0)$ ، فإن القيمة العظمى لاقتران الهدف: $T = 2x + y$ تتحدد عند الرأس:

a) P

b) Q

c) R

d) S

③ نظام المتباينات الذي ليس له حل هو:

a) $3x + 5y \geq 15$
 $2x + 3y \geq 6$

b) $x + 2y \geq 2$
 $2x + 4y \leq 0$

c) $4x + 3y \geq 6$
 $4x + 3y \leq 10$

d) $x + y \geq 6$
 $x + y \geq 3$

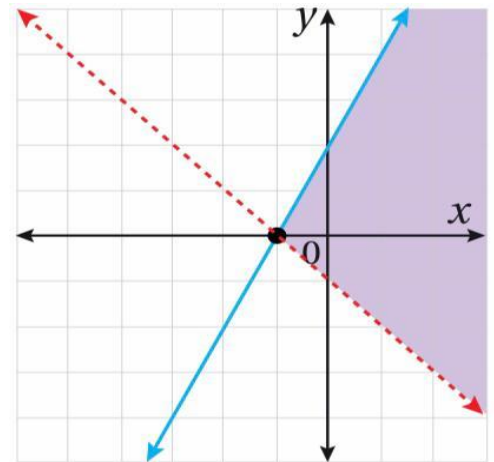
④ نظام المتباينات الذي له التمثيل البياني الآتي هو:

a) $y \leq 2x + 2$
 $y > -x - 1$

b) $y \geq 2x + 2$
 $y < -x - 1$

c) $y < 2x + 2$
 $y \leq -x - 1$

d) $y > 2x + 2$
 $y \leq -x - 1$



أحل كل نظام متباينات خطية مما يأتي:

⑤ $x - 8y \leq 9$

$4x + 7y > 3$

⑥ $12x + 10y > 1$

$-5x - 8y < 2$

$3x + y \geq -6$

7 أجد جميع الحلول الممكنة لنظام المتباينات الآتي، حيث m و n عدد صحيحان موجبان:

$$m + n > 4$$

$$3m + 7n \leq 21$$

8 أجد أكبر قيمة للاقتران: $P = 4x + y$ ضمن القيود الآتية:

$$x + y \leq 50$$

$$3x + y \leq 90$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

9 أجد أصغر قيمة للاقتران: $C = 200x + 500y$ ضمن القيود الآتية:

$$x + 2y \geq 10$$

$$3x + 4y \leq 24$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

طُرود خيرية: يريد تاجر مواد تموينية تشغيل عدد من العمال يومًا واحدًا لتجهيز طُرود تباع في شهر رمضان. حدد التاجر أجره العامل الماهر في هذا اليوم بـ 30 JD، وأجره العامل المبتدئ بـ 20 JD، لكنه لا يريد أن ينفق أكثر من 630 JD على تجهيز الطُرود. استطاع التاجر إيجاد 15 عاملاً ماهراً فقط؛ لذا قرر أن يُشغل عاملاً ماهراً واحدًا على الأقل مقابل كل 3 عمال مبتدئين، علمًا بأن العامل الماهر يُجهز 25 طردًا في الساعة، والعامل المبتدئ يُجهز 18 طردًا في الساعة:

(10) أكتب نظام متباينات يمثل هذه المعلومات، ثم أمثله

(11) أجد عدد العمال المهرة والعمال المبتدئين الذين يجب تشغيلهم لتجهيز أكبر عدد ممكن من الطُرود.

تعليم: يعقد مصنع دورة تدريبية لطلبة الهندسة في إحدى الجامعات، بحيث يكون عدد الطالبات المتدربات x ، وعدد الطلاب المتدربين y ، ولا يقل العدد الإجمالي للطالبات والطلاب عن 5، ولا يزيد على 15، ولا يقل عدد الطلاب عن نصف عدد الطالبات:

(12) أشرح بالكلمات معنى : $2y \geq x$

(13) إذا كان عدد الطالبات المتدربات 6، فما العدد الممكن للطلاب المتدربين ؟

(14) يُنتج مصنع نوعين من القطع المعدنية باستعمال الآلتين A و B معا. ويُبين الجدول التالي الزمن الذي تستغرقه معالجة القطعة الواحدة في كل من الآلتين، ومقدار ربح المصنع من بيع القطعة الواحدة من كل نوع. إذا كان عدد ساعات العمل اليومي للآلة A لا يزيد على $10h$ ، وعدد ساعات العمل اليومي للآلة B لا يزيد على $6h$ ، فكم قطعة من كل نوع يجب أن ينتج المصنع يوميا لتحقيق أكبر ربح ممكن ؟

	القطعة من النوع الأول	القطعة من النوع الثاني
زمن المعالجة في الآلة A	$2h$	$1h$
زمن المعالجة في الآلة B	$1h$	$1h$
مقدار الربح	$JD\ 10$	$JD\ 15$