

الوحدة الخامسة:

التكامل - Integration



أستعد لدراسة الوحدة



أجد كلا من التكمالات الآتية:

$$\textcircled{10} \int 2 + x^3 + 5x^{-2} dx$$

$$\textcircled{11} \int 8x^3 - 3x + 1 dx$$

$$\textcircled{12} \int \sqrt{x} + 1 dx$$

$$\textcircled{13} \int x^{-\frac{3}{2}} + 2 dx$$

$$\textcircled{14} \int 6x^2 - 2x^{-3} dx$$

$$\textcircled{15} \int 2x^4 + 3x^{-3} - 7x^2 dx$$

$$\textcircled{16} \int 5x^{-\frac{3}{2}} + 3x^2 dx$$

$$\textcircled{17} \int 2x^7 - \frac{4}{x^4} dx$$

$$\textcircled{18} \int \sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}} dx$$



$$\textcircled{1} \int 3x^2 dx$$

$$\textcircled{2} \int x^{18} dx$$

$$\textcircled{3} \int x^{-4} dx$$

$$\textcircled{4} \int \sqrt[6]{x} dx$$

$$\textcircled{5} \int 9 dx$$

$$\textcircled{6} \int 7 dx$$

$$\textcircled{7} \int \pi dx$$

$$\textcircled{8} \int e dx$$

$$\textcircled{9} \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

لا تظن أن تعبك يضيع، فكل ساعة درستها، وكل صفحة تعبت فيها، هي لبنة حقيقية في بناء مستقبلك الذي ستفخر به يوماً ما.

$$(29) \int \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{x}} dx$$

$$(30) \int (x - 1)(x + 3) dx$$

$$(31) \int x^5 dx$$

$$(32) \int x^2(x - 8) dx$$

$$(33) \int (x - 1)(x - 3)(x + 1) dx$$

$$(34) \int (2x + 5)^5 dx$$

$$(35) \int (x + 7)^6 dx$$

$$(36) \int (3x - 4)^6 dx$$

$$(37) \int \sqrt{x + 1} dx$$

$$(38) \int \frac{1}{\sqrt{4x - 2}} dx$$

$$(19) \int x(4x^3 - 4x + 1) dx$$

$$(20) \int x \left(x^2 + \frac{2}{x} \right) dx$$

$$(21) \int x \sqrt{x} dx$$

$$(22) \int \frac{x^3 + 7x - 2x^2}{x} dx$$

$$(23) \int \frac{x^7 - 4x^3 + 8x}{2x} dx$$

$$(24) \int \frac{3x + 2x^4}{x} dx$$

$$(25) \int \frac{(x + 2)(x - 2)}{\sqrt{x}} dx$$

$$(26) \int \frac{x + 2}{\sqrt{x}} dx$$

$$(27) \int \frac{2x^2 + 4}{x^2} dx$$

$$(28) \int \frac{4x^3 - 2}{x^3} dx$$

التوجيهي ليس امتحان مواد فقط، بل امتحان صبر وإرادة، ومن ينجح فيه يتعلم كيف ينجح في الحياة كلها

$$(48) \int_1^4 \frac{2 + \sqrt{x}}{x^2} dx$$

$$(49) \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$$

$$(50) \int_0^1 (2x - 5) dx$$

$$(51) \int_{-4}^3 x(4 - 3x) dx$$

$$(52) \int_1^4 (8x - \sqrt{x}) dx$$

$$(53) \int_{-1}^2 (1 - x)(1 + 3x) dx$$

$$(54) \int_{-1}^3 3x^2 dx$$

$$(55) \int_{-3}^{-2} 6 dx$$

$$(39) \int (x + 7)^4 dx$$

$$(40) \int \frac{3}{(10x + 1)^2} dx$$

$$(41) \int \frac{2}{\sqrt{10x + 5}} dx$$

$$(42) \int \frac{x^2 - 1}{x + 1} dx$$

$$(43) \int \frac{x^2 - 4}{x - 2} dx$$

$$(44) \int \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2} dx$$

$$(45) \int \left(\frac{x^2 + 1}{x^2} \right)^2 dx$$

$$(46) \int_{-2}^3 x^5 dx$$

$$(47) \int_1^2 \frac{2}{x^3} dx$$

لا تقارن بدايتك بنهاية غيرك، فكل مجتهد قصة تعب خاصة به،
ونهايتك ستكون كما تستحق.



**إيجاد قاعدة اقتران علمت
مشتقته ونقطة تحققه
(الشرط الأولي)**

① أجد قاعدة الاقتران $f(x)$ إذا كان
 $f'(x) = x^2 + 1$ ويمر منحناه بالنقطة $(0, 8)$

② أجد قاعدة الاقتران $f(x)$ إذا كان
 $f'(x) = x - 3$ ويمر منحناه بالنقطة $(2, 9)$

③ أجد قاعدة الاقتران $f(x)$ إذا كان
 $f'(x) = 3x^2 + 4x - 3$ ويمر منحناه
بالنقطة $(2, 4)$

④ أجد قاعدة الاقتران $f(x)$ إذا كان
 $f'(x) = 6x^2 + 5$ ويمر منحناه بالنقطة $(1, 9)$

$$\textcircled{56} \int_0^2 3x^2 + 4x + 3 \, dx$$

$$\textcircled{57} \int_1^8 8 \sqrt[3]{x} \, dx$$

$$\textcircled{58} \int_{-2}^3 (-x^2 + 4x - 5) \, dx$$

$$\textcircled{59} \int_2^3 \frac{x^2 - 9}{x + 3} \, dx$$

$$\textcircled{60} \int_1^3 (x + 2)(x - 2) \, dx$$

$$\textcircled{61} \int_{-3}^3 (9 - x^2) \, dx$$



عندما تفتح الكتاب وأنت متعب، اعلم أنك تصنع فرقًا حقيقيًا بينك
وبين من استسلم.



7 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران
 $f(x) = x^2 + 1$ والمحور x والمستقيمين
 $x = 1$ و $x = 4$

8 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران
 $f(x) = x^2 - 8x$ والمحور x والمستقيمين
 $x = 2$ و $x = 5$

9 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران
 $f(x) = 3x^2 + 12$ والمحور x والمستقيمين
 $x = 1$ و $x = 3$

10 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى
 الاقتران $f(x) = x^2 - 3x$ والمحور x

11 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى
 الاقتران $f(x) = x^3 - x$ والمحور x



إيجاد المساحة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x

1 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى
 الاقتران $f(x) = 2x^2 - x^3$ والمحور x

2 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى
 الاقتران $f(x) = x^2 - 8x + 12$ والمحور x

3 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران
 $f(x) = x^3 + 4x^2 - 11x - 30$ والمحور x

4 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران
 $f(x) = x^2 + 2$ والمحور x والمستقيمين
 $x = 1$ و $x = -2$

5 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران
 $f(x) = \frac{2}{x^2} - 3$ والمحور x والمستقيمين
 $x = 4$ و $x = 2$

6 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى
 الاقتران $f(x) = -x^3 - x^2 + 6x$ والمحور x

النجاح في التوجيهي لا يحتاج ذكاء خارق، بل يحتاج نفساً طويلاً، وصبراً لا ينقطع، وإيماناً بأن الله لا يضيع الجهد.



**إيجاد حجم المجسم الناتج
من دوران منحنى اقتران
حول محور x**

① أجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة

المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = x^{1/3}$
والمحور x والمستقيمين $x = 1$ و $x = 8$ حول
محور x

② أجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة

المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = 2x + 3$
والمحور x والمستقيمين $x = 2$ و $x = 5$ دورة
كاملة حول المحور x



كل مرة تجبر نفسك على الدراسة رغم الكسل، أنت تنتصر على أضعف
نسخة منك، وتقترب من أقوى نسخة.



الدرس الأول: تكامل اقترانات خاصة

تكامل الاقترانات الأسية:

اقترانات ناتجة من اشتقاق اقترانات مشهورة بصورة مباشرة ، أو باستعمال قاعدة السلسلة ، مثل الاقترانات الأسية.

تعلّمت سابقًا أنّ التكامل هو عملية عكسية للاشتقاق ، وأنّ $\int f(x)dx$ يُسمّى التكامل غير المحدود للاقتران $f(x)$ ، كما في المخطّط الآتي الذي يُبيّن عناصر هذا النوع من التكامل.

مفهوم أساسي صيغ تكاملات اقترانات أسية

إذا كانت k, b, a أعدادًا حقيقيةً ، و $a \neq 0$ ، و $k > 0$ ، و $k \neq 1$ ، و e العدد النيبيري، فإنّ:

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$$

$$\int k^x dx = \frac{k^x}{\ln k} + C$$

$$\int k^{ax+b} dx = \frac{k^{ax+b}}{a \ln k} + C$$

مُتغيّر التكامل

ثابت التكامل

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

اقتران أصلي للاقتران $f(x)$

المُكامل

أتذكر

إذا كان $F(x)$ اقتراناً أصلياً للاقتران $f(x)$ ، فإنّ: $F'(x) = f(x)$ ؛ أيّ أنّه يُمكن التحقّق من صحّة الحلّ بإيجاد مشتقة نتيجة التكامل ، وفي هذه الحالة ، يجب أن تكون المشتقة مُساوية للمُكامل.

أتذكر

- $\frac{d}{dx} (e^x) = e^x$
 - $\frac{d}{dx} (e^{ax+b}) = ae^{ax+b}$
 - $\frac{d}{dx} (k^x) = k^x \times \ln k$
 - $\frac{d}{dx} (k^{ax+b}) = k^{ax+b} \times \ln k \times a$
- حيث $k > 0$ ، و $k \neq 1$.

أما $\int_a^b f(x)dx$ فيُسمّى التكامل المحدود للاقتران $f(x)$ ، حيث a الحدّ السفلي للتكامل، و b الحدّ العلوي للتكامل.

يُمكن إيجاد قيمة $\int_a^b f(x)dx$ للاقتران المُتّصل $f(x)$ على النحو الآتي:

حدود التكامل من a إلى b

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b$$

أستعمل هذا الرمز بعد الانتهاء من عملية التكامل.

$$= F(b) - F(a)$$

قيمة الاقتران الأصلي عند الحدّ العلوي.

قيمة الاقتران الأصلي عند الحدّ السفلي.

بما أنّ التكامل والاشتقاق عمليتان عكسيتان ، فإنّ ذلك يساعد على إيجاد صيغ مباشرة لتكامل

مثال (1) أجد كلا من التكاملات الآتية:

$$\textcircled{1} \int 2e^{4x+3} dx$$

أتذكر

- حيث k ثابت. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$
- $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$ ، $n \neq -1$

لا تحف من حفظ التوجيهي، فال حفظ هو ما يصنع الماس. وأنت قادر أن تخرج متألّفًا.

تكامل الاقترانات المثلثية:

تعلّمتُ سابقًا إيجاد مشتقات الاقترانات المثلثية الست ، وهذا يعني أنه يُمكن إيجاد تكاملات الاقترانات المثلثية الناتجة من مشتقات تلك الاقترانات الست بصورة مباشرة.

مفهوم أساسي صيغ تكاملات اقترانات مثلثية (1)

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$$

$$\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$$

أمّا الاقترانات المثلثية التي تكون زواياها في صورة: $ax + b$ ، حيث: $a \neq 0$ ، فيمكن إيجاد تكاملاتها على النحو الآتي:

مفهوم أساسي صيغ تكاملات اقترانات مثلثية (2)

إذا كان a, b عددين حقيقيين ، و $a \neq 0$ ، فإن:

$$\int \sin(ax + b) \, dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + C$$

$$\int \cos(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + C$$

$$\int \sec^2(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \tan(ax + b) + C$$

$$\int \csc^2(ax + b) \, dx = -\frac{1}{a} \cot(ax + b) + C$$

$$\int \sec(ax + b) \tan(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \sec(ax + b) + C$$

$$\int \csc(ax + b) \cot(ax + b) \, dx = -\frac{1}{a} \csc(ax + b) + C$$

$$\textcircled{2} \int_0^2 (6e^{-3x} + x^3) \, dx$$

$$\textcircled{3} \int \sqrt{e^{x+1}} \, dx$$

$$\textcircled{4} \int (5^x + 7) \, dx$$

أتذكر

يحتوي ناتج التكامل غير المحدود على الثابت C ؛ لأنّ مشتقة الثابت صفر. أمّا التكامل المحدود فلا يحتوي على الثابت C ؛ لأنّه يُحذف عند تعويض الحدّ العلوي والحدّ السفلي.



أتحقق من فهمي:



أجد كلا من التكاملات الآتية:

$$\textcircled{a} \int (5x^2 - 3e^{7x}) \, dx$$

$$\textcircled{b} \int_0^{\ln 3} 8e^{4x} \, dx$$

$$\textcircled{c} \int \sqrt{e^{1-x}} \, dx$$

$$\textcircled{d} \int (3^x + 2\sqrt{x}) \, dx$$



التمب الذي تمشيه اليوم، ستمنى العودة إليه يومًا لأنك عرفت أنه كان طريق فخر.



المتطابقات المثلثية والتكامل:

تعلّمتُ سابقًا أنه يُمكن إعادة كتابة المقادير المثلثية بصورة مكافئة باستعمال المتطابقات المثلثية ، وهذا يساعد على إيجاد تكاملات بعض الاقترانات المثلثية التي لا يُمكن إيجادها مباشرة ، مثل: اقترانات الجيب ، وجيب التمام ، والظلّ ، وظلّ التمام المرفوعة إلى أُسّ ، أو الاقترانات المثلثية التي تكون في صورة حاصل ضرب اقتراني جيب ، أو اقتراني جيب تمام ، أو اقتران جيب مضروب في اقتران جيب تمام ، وغير ذلك من الاقترانات المثلثية.

أتعلم

لا يُمكنني إيجاد تكامل اقتران مثلثي مرفوع إلى أُسٍ فردي باستعمال المتطابقات فقط، وإنما أحتاج إلى طرائق أخرى سأتعلمها في الدرس التالي.

مثال (3) أجد كلا من التكاملات الآتية:

$$\textcircled{1} \int \tan^2 2x \, dx$$

$$\textcircled{2} \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx$$

$$\textcircled{3} \int \sin 4x \cos 5x \, dx$$

$$\textcircled{4} \int \frac{dx}{1 - \cos x}$$

مثال (2) أجد كلا من التكاملات الآتية:

$$\textcircled{1} \int 2 \sin(4x + 3) \, dx$$

$$\textcircled{2} \int (3 \cos x + \sqrt[3]{x}) \, dx$$

$$\textcircled{3} \int_0^{\pi/12} \sec^2 3x \, dx$$

بصحة

أتتحقق من فهمي:



أجد كلا من التكاملات الآتية:

$$\textcircled{a} \int \cos(3x - \pi) \, dx$$

$$\textcircled{b} \int (\csc^2(5x) + e^{2x}) \, dx$$

$$\textcircled{c} \int_0^{\pi/3} (\sin 2x - \cos 4x) \, dx$$

بصحة

حين تتعب، تذكّر أهلك الذين ينتظرون فرحتك، وتذكّر نفسك وأنت ترفع رأسك بنتيحتك.

أتذكر

تعلّمتُ سابقًا أنّه يُمكن إعادة كتابة المقادير المثلثية بصورة لا تحوي كسرًا إذا كان مقامها في صورة: $1 \pm u$ ، وذلك باستعمال الضرب في المُرافق. وتُعزى أهمية هذا الإجراء في التكامل إلى عدم وجود قاعدة لإيجاد تكامل القسمة مباشرة.

وباستعمال قاعدة السلسلة ، فإنّ:

$$\frac{d}{dx} (\ln(-x)) = \frac{1}{-x} \times -1 = \frac{1}{x}$$

وهذا يعني أنّ:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + C \quad , \quad x < 0$$

وبدمج النتيجةين فإنّه يُمكن التوصل إلى القاعدة الآتية:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad , \quad x \neq 0$$

يُمكن استعمال هذه القاعدة لإيجاد تكاملات مجموعة أوسع من الاقترانات ، مثل الاقترانات التي تُكتَب في صورة: $\frac{1}{ax+b}$ ، أو صورة: $\frac{f'(x)}{f(x)}$ ، أي الاقترانات التي يُمكن كتابتها في صورة يكون فيها البسط أحد مضاعفات مشتقة المقام ، وذلك بملاحظة أنّ:

$$\frac{d}{dx} (\ln|f(x)|) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

مفهوم أساسي تكاملات ينتج منها اقتران لوغاريتمي طبيعي

إذا كان a, b عددين حقيقيين ، و $a \neq 0$ ، وكان $f(x)$ اقترانًا قابلاً للاشتقاق ، فإنّ:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad , \quad x \neq 0$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C \quad , \quad x \neq -\frac{b}{a}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C \quad , \quad f(x) \neq 0$$



أتتحقق من فهمي:



أجد كلا من التكاملات الآتية:

(a) $\int \cos^4 x dx$

(b) $\int_0^{\pi/6} \sin 3x \sin x dx$

(c) $\int \frac{dx}{1 + \cos x}$



تكاملات ينتج منها اقتران لوغاريتمي طبيعي:

تعلّمتُ سابقًا أنّ: $\frac{d}{dx} (\ln x) = \frac{1}{x}$ ، وهذا يعني أنّ: $\frac{1}{x} dx = \ln x + C$

وبما أنّ $\ln x$ مُعرّف عندما يكون $x > 0$ ، فإنّ:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C \quad , \quad x > 0$$

ولكنّ $\ln(-x)$ مُعرّف عندما يكون $x < 0$.

الدراسة في أيام التوجيهي ليست عبثًا، بل استثمار حقيقي لعمر

كامل قادم.



أتحقق من فهمي:



أجد كلا من التكاملات الآتية:

(a) $\int \left(\sin x - \frac{5}{x} \right) dx$

(b) $\int \frac{5}{3x + 2} dx$

(c) $\int \frac{x^2 - 7x + 2}{x^2} dx$

(d) $\int \frac{2x + 3}{x^2 + 3x} dx$

(e) $\int \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} dx$

(f) $\int \cot x dx$

(g) $\int \frac{e^x}{e^x + 7} dx$

(h) $\int \csc x dx$



مثال (4) أجد كلا من التكاملات الآتية:

① $\int \left(2e^x + \frac{3}{x} \right) dx$

② $\int \frac{1}{4x - 1} dx$

③ $\int \frac{2x^5 - 4}{x} dx$

④ $\int \frac{2x}{x^2 - 1} dx$

⑤ $\int \frac{6x}{x^2 + 9} dx$

⑥ $\int \frac{\cos x}{3 + 2 \sin x} dx$

⑦ $\int \tan x dx$

⑧ $\int \sec x dx$



ربما لا ترى نتيجة تعبك الآن، لكن الأيام القادمة ستخبرك أن كل جهد بذلته كان في مكانه الصحيح.

تطبيقات التكامل: الشرط الأولي:

تعلّمتُ سابقًا أنّ الشرط الأولي هو نقطة تُحقّق الاقتران الأصلي ، ويُمكن بتعويضها إيجاد قيمة ثابت التكامل C ، ويُمكن بها أيضًا إيجاد الاقتران الأصلي الوحيد الذي يُحقّق شرط المسألة ، علمًا بأنّ الشرط الأولي يُستعمل كثيرًا لتحديد اقترانات تُنمذج مواقف علمية وحياتية.

يتطلّب إيجاد تكاملات بعض الاقترانات النسبية أحيانًا إعادة كتابة المُكامل بصورة أُخرى باستعمال القسمة، في حال كانت درجة البسط أعلى من (أو تساوي) درجة المقام. وقد ينتج من صورة الاقتران الجديدة تكاملٌ ينتج منه اقتران لوغاريتمي طبيعي.

أتذكر

الاقترانات النسبية هي اقترانات يُمكن كتابتها في صورة نسبة بين كثيري حدود: $\frac{f(x)}{g(x)}$ ، حيث: $g(x) \neq 0$.



مثال (6) من الحياة:



تلوث: يُعالج التلوث

في بحيرة باستعمال مضاد للبكتيريا. إذا كان عدد الخلايا البكتيرية

الضارّة في البحيرة يتغيّر بمعدّل:

حيث $N(t)$ عدد الخلايا البكتيرية لكل مليمتر من الماء بعد t يومًا من استعمال المضاد فأجد $N(t)$ ، علمًا بأنّ العدد الابتدائي للخلايا هو 5000 خلية لكل مليمتر.



أتتحق من فهمي:



تلوث: تسرّب نفط من ناقلة بحرية ، مُكوّنًا بقعة

دائرية الشكل على سطح الماء ، نصف قطرها $R(t)$ قدمًا بعد t دقيقة من بدء التسرّب. إذا كان

نصف قطر الدائرة يزداد بمعدّل: $R'(t) = \frac{21}{0.07t+5}$ فأجد $R(t)$ ، علمًا بأنّ $R(0) = 0$.



مثال (5) أجد: $\int \frac{x^3+x}{x-1} dx$

أتذكر

إذا كان $\frac{f(x)}{g(x)}$ اقترانًا نسبيًا فيه درجة $f(x)$ أكبر من (أو تساوي) درجة $g(x)$ ، وكان ناتج القسمة $q(x)$ ، وباقي القسمة $r(x)$ ، فإنّ: $\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$



أتتحق من فهمي:



أجد: $\int \frac{x^2+x+1}{x+1} dx$



النجاح لا يأتي فجأة، بل يأتي بعد ألف مرة قلت فيها "أنا تمبت" ثم كملت.

مفهوم أساسي المسافة الكلية المقطوعة

إذا تحرك جسم في مسار مستقيم وفق اقتران الموقع $s(t)$ ، فإن سرعته هي: $v(t) = s'(t)$ ، والمسافة الكلية (d) التي قطعها في الفترة الزمنية $[t_1, t_2]$ هي:

$$d = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)| dt$$

أتعلم

المسافة هي طول المسار الذي يقطعه الجسم بصرف النظر عن الاتجاه، وقيمتها أكبر من (أو تساوي) الصفر. أما الإزاحة فهي التغير في الموقع.

تطبيقات التكامل: الحركة في مسار مستقيم:

من التطبيقات المهمة على الشرط الأولي، إيجاد موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم إذا عُلم اقتران السرعة، وعُلم شرط أولي عن موقع الجسم.

يُطلق على التغير في موقع الجسم اسم **الإزاحة** (displacement). فإذا كان موقع جسم عند الزمن t ، فإن الإزاحة على الفترة الزمنية $[t_1, t_2]$ هي: $s(t_2) - s(t_1)$ ، وقد تكون قيمتها موجبة، أو سالبة، أو صفرًا، تبعًا لاتجاه حركة الجسم.

يُستعمل التكامل المحدود لإيجاد إزاحة جسم، عُلمت سرعته، على النحو الآتي:

مفهوم أساسي الإزاحة

إذا تحرك جسم في مسار مستقيم وفق اقتران الموقع $s(t)$ ، فإن سرعته هي: $v(t) = s'(t)$ ، وإزاحته في الفترة الزمنية $[t_1, t_2]$ هي:

$$s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

أما إذا كان المطلوب إيجاد المسافة الكلية التي قطعها جسم خلال فترة زمنية، فيجب تحديد الفترات الزمنية الجزئية التي تكون عندها $v(t) \leq 0$ (يتحرك الجسم إلى الجهة السالبة)، وتحديد الفترات الزمنية الجزئية التي تكون عندها $v(t) \geq 0$ (يتحرك الجسم إلى الجهة الموجبة). وفي كلتا الحالتين، تُحسب المسافة الكلية بإيجاد تكامل اقتران السرعة القياسية $|v(t)|$ على النحو الآتي:

مثال (7)

يتحرك جسيم في مسار مستقيم وتعطى سرعته بالاقتران:

$v(t) = \sin t$ ، حيث t الزمن بالثواني و v سرعته بالمتري لكل ثانية:

① إذا بدأ الجسيم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقع الجسيم بعد $\frac{\pi}{3}$ ثانية من بدء الحركة.

② أجد إزاحة الجسيم في الفترة $[0, 3\pi]$.

③ أجد المسافة الكلية التي قطعها الجسيم في الفترة $[0, 3\pi]$.



أتحقق من فهمي:



يتحرك جسيم في مسار مستقيم ، وتعطى سرعته بالاقتران: $v(t) = 3 \cos t$ ، حيث t الزمن بالثواني و v سرعته بالمتر لكل ثانية:

(a) إذا بدأ الجسيم حركته من نقطة الأصل ، فأجد موقع الجسيم بعد $\frac{\pi}{6}$ ثانية من بدء الحركة.

(b) أجد إزاحة الجسيم في الفترة $[0, 2\pi]$.

(c) أجد المسافة الكلية التي قطعها الجسيم في الفترة $[0, 2\pi]$.



أدرب وأحل المسائل:



أجد كلا من التكاملات الآتية:

$$① \int (e^{2x-3} - \sqrt{x}) dx$$

$$② \int \left(e^{0.5x} - \frac{3}{e^{0.5x}} \right) dx$$

$$③ \int (4 \sin 5x - 5 \cos 4x) dx$$

$$④ \int \left(3 \sec x \tan x - \frac{2}{5x} \right) dx$$

$$⑤ \int \left(\sqrt{e^x} - \frac{1}{\sqrt{e^x}} \right)^2 dx$$

$$⑥ \int (\sin(5 - 3x)) + 2 + 4x^2 dx$$

$$⑦ \int (e^x + 1)^2 dx$$

$$⑧ \int (e^{4-x} + \sin(4 - x) + \cos(4 - x)) dx$$

$$⑨ \int \frac{x^4 - 6}{2x} dx$$

$$⑩ \int \left(3 \csc^2(3x + 2) + \frac{5}{x} \right) dx$$

$$⑪ \int \frac{e^x + 1}{e^x} dx$$

$$⑫ \int \frac{e^x}{e^x + 4} dx$$

$$⑬ \int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x + 4} dx$$

$$(24) \int \frac{x^2}{x^3 - 3} dx$$

$$(25) \int (9 \cos^2 x - \sin^2 x - 6 \sin x \cos x) dx$$

$$(26) \int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx$$

أجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$(27) \int_0^{\pi} 2 \cos \frac{1}{2} x dx$$

$$(28) \int_0^{2\pi} |\sin x| dx$$

$$(29) \int_1^e \frac{8x}{x^2 + 1} dx$$

$$(30) \int_0^{\pi/6} \sin 3x \cos x dx$$

$$(31) \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cot^2 x}{1 + \cot^2 x} dx$$

$$(32) \int_0^3 (x - 5^x) dx$$

$$(14) \int \frac{dx}{5 - \frac{x}{3}}$$

$$(15) \int \frac{1}{1 - \sin x} dx$$

$$(16) \int \sec^2 x (1 + e^x \cos^2 x) dx$$

$$(17) \int \left(\frac{2}{x} - 2^x \right) dx$$

$$(18) \int \sin 3x \cos 2x dx$$

$$(19) \int \frac{2x + 3}{3x^2 + 9x - 1} dx$$

$$(20) \int \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} dx$$

$$(21) \int \left(\frac{1 + \cos x}{\sin^2 x} + (\sin^2 x \csc x) \right) dx$$

$$(22) \int (\sec x + \tan x)^2 dx$$

$$(23) \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$$

قد تتأخر الثمرة، لكنها حين تنضج تنسيك كل تعب الطريق.

37 إذا كان: $f(x) = \int \cos\left(\frac{1}{2}x + \pi\right) dx$ ، وكان: $f(\pi) = 3$ ، فأجد: $f(0)$.

38 إذا كان: $y = \int \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) dx$ ، وكان: $y = 1$ عندما $x = \frac{\pi}{4}$ ، فأثبت أنه يُمكن كتابة y في صورة: $y = \frac{1 + \sin 2x}{2}$.

39 يُمثّل الاقتران: $\frac{dy}{dx} = e^{2x} - 2e^{-x}$ ميل المماس لمنحنى الاقتران y . أجد قاعدة الاقتران y إذا علمت أن منحناه يمرُّ بالنقطة $(0, 1)$.

40 إذا كان: $\int_{\pi/9}^{\pi} (9 + \sin 3x) dx = a\pi + b$ ، فأجد قيمة الثابتين النسبيين: a ، و b .

41 إذا كان: $f'(x) = \tan x$ ، وكان: $f(3) = 5$ ، فأثبت أن: $f(x) = \ln\left|\frac{\cos 3}{\cos x}\right| + 5$.

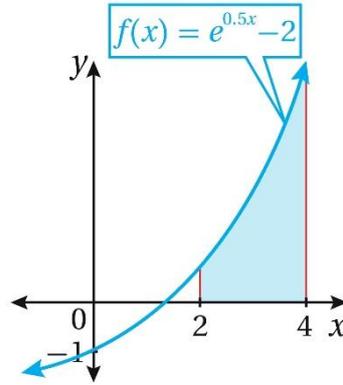
42 يُمثّل الاقتران: $f'(x) = \cos^2 x$ ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$. أجد قاعدة الاقتران f إذا علمت أن منحناه يمرُّ بنقطة الأصل.

يتحرّك جُسيم في مسار مستقيم ، وتعطى سرعته بالاقتران: $v(t) = e^{-2t}$ ، حيث t الزمن بالثواني ، و v سرعته بالمتر لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسيم هو $3m$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

43 موقع الجُسيم بعد t ثانية.

44 موقع الجُسيم بعد 100 ثانية.

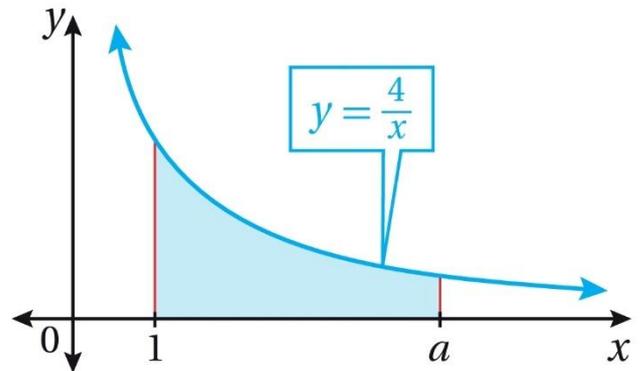
33 أوجد مساحة المنطقة المُظلّلة بين المحور x ومنحنى الاقتران: $f(x) = e^{0.5x} - 2$ في الشكل المجاور.



34 إذا كان: $\int_a^{3a} \frac{2x+1}{x} dx = \ln 12$ فأجد قيمة الثابت a ، حيث: $a > 0$.

35 أثبت أن: $\int_0^a \frac{x}{x^2 + a^2} dx = \ln \sqrt{2}$ ، حيث: $a \neq 0$.

36 يُبيّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{4}{x}$. إذا كانت مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ ، والمحور x ، والمستقيمين: $x = 1$ ، و $x = a$ ، هي 10 وحدات مُربّعة ، فأجد قيمة الثابت a .

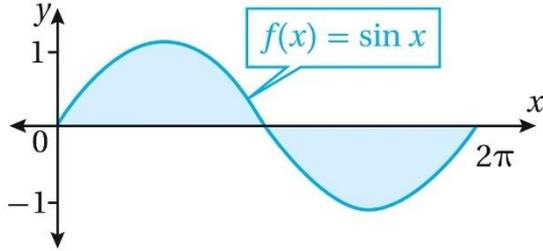


مهارات التفكير العليا:

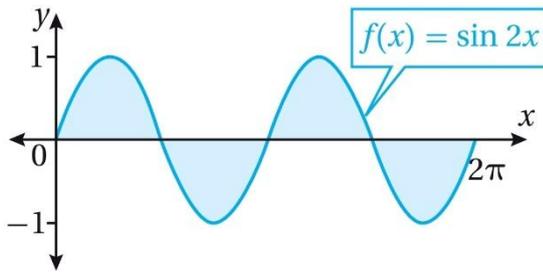


تبرير: أجد مساحة المنطقة المظلمة في كل من التمثيلين البيانيين الآتين، ثم أبرر إجابتي:

49



50



تحذير: أجد كل من التكاملات الآتية:

51 $\int \frac{\sec x}{\sin x - \cos x} dx$

52 $\int \frac{\cot x}{2 + \sin x} dx$

53 $\int \frac{1}{x \ln x^3} dx$

بيئة: في دراسة تناولت أحد أنواع الحيوانات المهددة بالانقراض في غابة، تبين أن عدد حيوانات هذا النوع $P(t)$ يتغير بمعدل:



$P'(t) = -0.51 e^{-0.03t}$
حيث t الزمن بالسنوات بعد بدء الدراسة:

45 أجد قاعدة الاقتران $P(t)$ عند أي زمن t ، علمًا بأن عدد حيوانات هذا النوع عند بدء الدراسة هو 500 حيوان.

46 أجد عدد الحيوانات بعد 10 سنوات من بدء الدراسة، وأقرب إجابتي إلى أقرب عدد صحيح.

طب: في تجربة لدواء جديد أعطي لمريض لديه ورم حميد، حجمه 30 cm^3 ، تبين أن حجم الورم بعد t يومًا من بدء التجربة يتغير بمعدل:



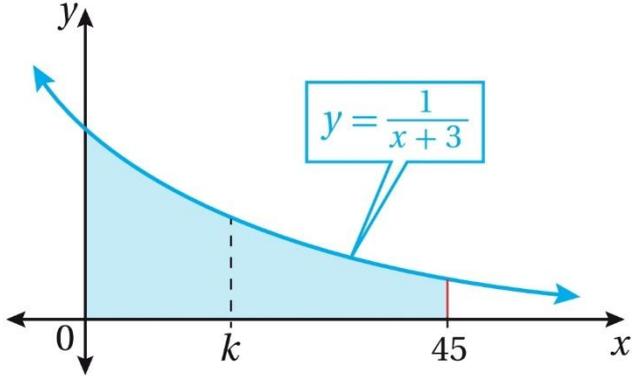
$P'(t) = 0.15 - 0.9e^{0.006t}$
مقيسًا بوحدة (cm^3/day) :

47 أجد قاعدة حجم الورم بعد t يومًا من بدء التجربة.

48 أجد حجم الورم بعد 10 أيام من بدء التجربة.

عندما تشعر أن الطريق طويل، تذكر كم قطعت منه بالفعل، وكم بقي أقل مما مضى.

59 **تحدي**   يُبيّن الشكل المجاور المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $y = \frac{1}{x+3}$ ، والمحور x ، والمستقيمين: $x = 0$ ، و $x = 45$. أجد قيمة k التي تقسم المنطقة المُظَلَّلة إلى منطقتين متساويتين في المساحة.



كتاب التمارين

أجد كلا من التكاملات الآتية:

① $\int 4e^{-5x} dx$

② $\int (\sin 2x - \cos 2x) dx$

③ $\int \cos^2 2x dx$

④ $\int \frac{e^x + 4}{e^{2x}} dx$

54 **تبرير**  إذا كان:

$$\int_1^a \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x+3} \right) dx = 0.5 \ln 5$$

فأجد قيمة الثابت a ، حيث: $a > 0$.

55 **تبرير**  أثبت بطريقتين مختلفتين أنّ:

$$\int_0^{\pi/4} \cos x \cos 3x dx - \int_0^{\pi/4} \sin x \sin 3x dx = 0$$

56 **تبرير**  إذا كان:

$$\int_{\pi/4k}^{\pi/3k} (1 - \pi \sin kx) dx = \pi(7 - 6\sqrt{2})$$

فأجد قيمة الثابت k ، ثمّ أبرّر إجابتي.

تحدي   يتحرّك جسّيم في مسار مستقيم،

وتعطى سرعته بالاقتران:

$$v(t) = \begin{cases} 2t + 4 & , 0 \leq t \leq 6 \\ 20 - (t - 8)^2 & , 6 < t \leq 10 \end{cases}$$

حيث t الزمن بالثواني ، و v سرعته بالمتر لكل ثانية: إذا بدأ الجسّيم حركته من نقطة الأصل ، فأجد كلاً مما يأتي:

57 موقع الجسّيم بعد 5 ثوانٍ من بدء الحركة.

58 موقع الجسّيم بعد 9 ثوانٍ من بدء الحركة.

$$\textcircled{15} \int \frac{3 - 2 \cos \frac{1}{2} x}{\sin^2 \frac{1}{2} x} dx$$

أجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$\textcircled{16} \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 4} dx$$

$$\textcircled{17} \int_1^2 \frac{dx}{3x - 2}$$

$$\textcircled{18} \int_0^{\pi/3} \sin x \cos x dx$$

$$\textcircled{19} \int_0^{\pi/4} (\cos x + 3 \sin x)^2 dx$$

$$\textcircled{20} \int_0^{\pi/4} \tan x dx$$

$$\textcircled{21} \int_0^{\pi/16} (\cos^2 2x - 4 \sin^2 x \cos^2 x) dx$$

$$\textcircled{22} \int_0^{\pi/4} \frac{(1 + \sin x)^2}{\cos^2 x} dx$$

$$\textcircled{5} \int \left(\frac{\cos x}{\sin^2 x} - 2e^x \right) dx$$

$$\textcircled{6} \int (3 \cos 3x - \tan^2 x) dx$$

$$\textcircled{7} \int \cos x (1 + \csc^2 x) dx$$

$$\textcircled{8} \int \frac{x^2 + x - 4}{x + 2} dx$$

$$\textcircled{9} \int \frac{1}{\sqrt{e^x}} dx$$

$$\textcircled{10} \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$\textcircled{11} \int \frac{x^2 - 2x}{x^3 - 3x^2} dx$$

$$\textcircled{12} \int \ln e^{\cos x} dx$$

$$\textcircled{13} \int \sin^2 \frac{x}{2} dx$$

$$\textcircled{14} \int \frac{3}{2x - 1} dx$$

يتحرّك جُسيْم في مسار مستقيم ، وتعطى سرعته بالاقتران: $v(t) = \frac{-t}{1+t^2}$ ، حيث t الزمن بالثواني ، و v سرعته بالمتر لكل ثانية:

29) أجد إزاحة الجُسيْم في الفترة $[0, 3]$.

30) أجد المسافة الكلية التي قطعها الجُسيْم في الفترة $[0, 3]$.

يتحرّك جُسيْم في مسار مستقيم ، وتعطى سرعته بالاقتران: $v(t) = 6 \sin 3t$ ، حيث t الزمن بالثواني ، و v سرعته بالمتر لكل ثانية:

31) أجد إزاحة الجُسيْم في الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$.

32) أجد المسافة الكلية التي قطعها الجُسيْم في الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$.

33) يتحرّك جُسيْم في مسار مستقيم ، وتعطى سرعته بالاقتران:

$$v(t) = \begin{cases} 8t - t^2 & , 0 \leq t \leq 6 \\ 15 - \frac{1}{2}t & , t > 6 \end{cases}$$

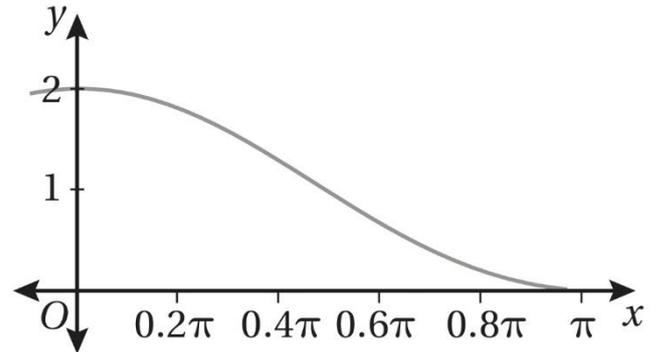
حيث t الزمن بالثواني ، و v سرعته بالمتر لكل ثانية ، إذا انطلق الجُسيْم من نقطة الأصل ، فأجد موقعه بعد 40 ثانية من بدء الحركة.

$$23) \int_0^1 \frac{6x}{3x+2} dx$$

24) إذا كان: $\int_1^k \frac{4}{2x-1} dx = 1$ ، فأجد قيمة الثابت k ، حيث: $k > \frac{1}{2}$.

25) إذا كان: $\int_0^{\ln a} (e^x + e^{-x}) dx = \frac{48}{7}$ ، فأجد قيمة a ، حيث: $a > 0$.

26) يُبيّن الشكل المجاور جزءًا من منحنى الاقتران: $f(x) = 2 \cos^2 0.5x$. أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران والمحورين الإحداثيين الموجبين.



في كلِّ ممّا يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$ ، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y = f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

$$27) f'(x) = e^{-x} + x^2 ; (0, 4)$$

$$28) f'(x) = \frac{3}{x} - 4 ; (1, 0)$$

الدرس الثاني: التكامل بالتعويض



بتعويض $u = x^2 + 6$, $dx = \frac{du}{2x}$ 📌

$$\int 2x \sqrt{x^2 + 6} dx = \int 2x \sqrt{u} \times \frac{du}{2x}$$

بالتبسيط 📌 $= \int \sqrt{u} du$

الصورة الأسية 📌 $= \int u^{1/2} du$

تكامل اقترانات القوة 📌 $= \frac{2}{3} u^{3/2} + C$

بتعويض $u = x^2 + 6$ 📌

$$= \frac{2}{3} (x^2 + 6)^{3/2} + C$$

ألاحظ من التكامل: $\int 2x \sqrt{x^2 + 6} dx$ أن $(2x)$

هو مشتقة $(x^2 + 6)$. وبوجه عام، يُمكن حلُّ أيِّ تكامل بطريقة التعويض إذا أمكن كتابته في صورة:

$$\int f(g(x)) g'(x) dx$$

أتذكر

يُمكنني التحقق من صحّة إجابتي بإيجاد مشتقة الاقتران الأصلي باستخدام قاعدة السلسلة، ثمّ مقارنة الناتج بالاقتران المُكامل:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left(\frac{2}{3} (x^2 + 6)^{3/2} + C \right) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} (x^2 + 6)^{1/2} \times 2x \\ &= 2x \sqrt{x^2 + 6} \end{aligned}$$

مفهوم أساسي التكامل بالتعويض للتكاملات غير المحدودة

إذا كان $u = g(x)$ اقتراناً قابلاً للاشتقاق، ومداه الفترة I ، وكان f اقتراناً مُتصلاً على I ، فإنّ:

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du$$

التكامل بالتعويض:

تعلّمتُ سابقاً أنّه يُمكن استعمال التكامل لإيجاد اقتران أصلي للاقتران المُكامل، وذلك بالبحث عن اقتران مشتقته تعطي الاقتران المُكامل. ولكن، لا يُمكن إيجاد اقتران أصلي لبعض التكاملات مباشرة، مثل: $\int 2x \sqrt{x^2 + 6} dx$ ؛ لذا نلجأ إلى طرائق أخرى للتكامل، منها طريقة **التكامل بالتعويض** (integration by substitution)، التي تتضمّن استعمال مُتغيّر جديد بدلاً من مُتغيّر التكامل.

أتذكر

لا توجد قاعدة لتكامل الضرب، أو تكامل القسمة.

يُمكن إيجاد: $\int 2x \sqrt{x^2 + 6} dx$ باستعمال مُتغيّر جديد، وليكن u ، بدلاً من المُتغيّر x ، باتّباع الخطوات الآتية:

الخطوة (1): افترض أنّ u هو المقدار أسفل

الجزر التربيعي؛ أي إنّ: $u = x^2 + 6$

الخطوة (2): إيجاد مشتقة u ، وهي:

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

الخطوة (3): حلُّ المعادلة لـ dx : $dx = \frac{du}{2x}$

الخطوة (4): استعمال المُتغيّر u بدلاً من المُتغيّر x في التكامل.

أتعلم

عند استعمال التعويض لحلّ التكامل، فإنّ التكامل الجديد يجب أن يكون كله بدلالة المُتغيّر الجديد.

أتعلم

بوجه عام، إذا احتوى المُكامل على اقتران ومشتقته، فإنه يُمكن حل التكامل بتعويض الاقتران.

$$④ \int x^3 \cos(x^4 - 5) dx$$

$$⑤ \int \sin^3 2x \cos 2x dx$$

أتذكر

$$\sin^3 2x = (\sin 2x)^3$$

$$⑥ \int \frac{5^{1/x}}{x^2} dx$$

أتحقق من فهمي:



أجد كلا من التكاملات الآتية:

$$① \int 4x^2 \sqrt{x^3 - 5} dx$$

$$② \int \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx$$

$$③ \int \frac{(\ln x)^3}{x} dx$$

$$④ \int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$$

$$⑤ \int \cos^4 5x \sin 5x dx$$

يُمكن تلخيص خطوات حلّ التكامل بالتعويض على النحو الآتي:

مفهوم أساسي خطوات حلّ التكامل بالتعويض

الخطوة (1): تحديد التعويض u الذي يُمكن به تبسيط المُكامل.

الخطوة (2): التعبير عن المُكامل بدلالة u و du ، وحذف مُتغيّر التكامل الأصلي ومشتقته حذفًا كاملًا، ثم كتابة المُكامل الجديد في أبسط صورة.

الخطوة (3): إيجاد التكامل الجديد.

الخطوة (4): التعبير عن الاقتران الأصلي الذي تمّ إيجادُه في الخطوة السابقة باستعمال المُتغيّر الأصلي عن طريق التعويض.



مثال (1) أجد كلا من التكاملات الآتية:

$$① \int 6x^2 (2x^3 - 3)^4 dx$$

$$② \int \sin x e^{\cos x} dx$$

$$③ \int \frac{\ln x}{x} dx$$

أتعلم

كتابة المُكامل بصورة أخرى تُسهّل عملية التعويض.

أتحقق من فهمي:



أجد كلا من التكاملات الآتية:

(a) $\int \frac{x}{\sqrt{1+2x}} dx$

(b) $\int x^7(x^4 - 8)^3 dx$

(c) $\int \frac{e^{3x}}{(1 - e^x)^2} dx$

التكامل بالتعويض لتكاملات تحوي المقدار

$$\sqrt[n]{ax + b}$$

يُمكن استعمال التكامل بالتعويض عند وجود المقدار $\sqrt[n]{ax + b}$ في بعض التكاملات ، وذلك بافتراض أن $u = \sqrt[n]{ax + b}$ ؛ بُغْيَةَ التخلُّص من الجذر.

مثال (3) أجد كل من التكاملين الآتين:

(1) $\int \frac{dx}{x - \sqrt{x}}$

أفكر

عند اشتقاق $u = x$ ، فإنني أطبق قواعد الاشتقاق الضمني.

(2) $\int x \sqrt[5]{(x+1)^2} dx$

(f) $\int x 2^{x^2} dx$

من الملاحظ أنَّ مشتقة u في الأمثلة السابقة موجودة بصورة مباشرة في المُكامل، إلا أنَّ استعمال التكامل بالتعويض لا يقتصر على هذه الحالة؛ إذ يُمكن استعمال التعويض في حالات أخرى، لكنَّها تكون بحاجة إلى إجراءات إضافية باستعمال التعويض لتبسيط المُكامل وكتابته كاملاً باستعمال المُتغيّر الجديد.

أتعلم

لا يقتصر استعمال التكامل بالتعويض على التكاملات التي تحوي اقتراناً ومشتقته.

مثال (2) أجد كلا من التكاملات الآتية:

(1) $\int x \sqrt{2x+5} dx$

أتعلم

الأجظ أنَّ مشتقة u هي ثابت (2) ، وهذا يعني أنَّ المُتغيّر x لا يُمكن حذفه بالتبسيط مباشرة، وإنما يتطلّب ذلك تنفيذ إجراءات أخرى، ما يدلُّ على وجوب كتابة x بدلالة u .

(2) $\int x^5(1+x^2)^3 dx$

(3) $\int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx$

أتحقق من فهمي:



أسعار: يُمثل الاقتران $p(x)$ سعر قطعة (بالدينار) تُستعمل في أجهزة الحاسوب ، حيث x عدد القطع المباعة منها بالمئات. إذا كان: $p'(x) = \frac{-135x}{\sqrt{9+x^2}}$ هو معدل تغير سعر هذه القطعة ، فأجد $p(x)$ ، علمًا بأن سعر بيع القطعة الواحدة هو JD 30 عندما يكون عدد القطع المباعة منها 400 قطعة.

التكامل بالتعويض لاقتربات تتضمن اقتراني الجيب وجيب التمام المرفوعين إلى أس فردي:

تعلمت في الدرس السابق إيجاد تكامل اقتراني الجيب وجيب التمام المرفوعين إلى أس زوجي باستعمال متطابقات تقليص القوة، وتعلمت أيضًا إيجاد تكامل الاقترانات المثلثية التي تكون في صورة حاصل ضرب اقتراني جيب، أو اقتراني جيب تمام، أو اقتران جيب في اقتران جيب تمام.

أما بالنسبة إلى التكاملات التي تحوي اقتراني جيب وجيب تمام مرفوعين إلى أس فردي فيمكن استعمال التعويض لإيجادها، إضافةً إلى استعمال المتطابقة المثلثية الآتية: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

أتحقق من فهمي:



أجد كل من التكاملين الآتين:

a) $\int \frac{dx}{x + \sqrt[3]{x}}$

b) $\int x \sqrt[3]{(1-x)^2} dx$

تعلمت سابقًا أنّ الشرط الأولي هو نقطة تُحقق الاقتران الأصلي، ويُمكن بتعويضها إيجاد قيمة ثابت التكامل C ، ويُمكن بها أيضًا إيجاد الاقتران الأصلي الوحيد الذي يُحقق شرط المسألة.



مثال (4) من الحياة:

زراعة: يُمثل الاقتران $V(t)$ سعر دونم أرض زراعية (بالدينار) بعد t سنة من الآن. إذا كان: $V'(t) = \frac{0.4 t^3}{\sqrt{0.2 t^4 + 8000}}$ هو معدل تغير سعر دونم الأرض ، فأجد $V(t)$ ، علمًا بأن سعر دونم الأرض الآن هو JD 5000 .



مثال (5) أجد كلا من التكاملين الآتين:

① $\int \cos^3 x dx$

② $\int \cos^4 x \sin^3 x dx$

التوجيهي ليس معركة مع المواد، بل معركة مع نفسك، ومن ينتصر على نفسه ينتصر على كل شيء.

$$\textcircled{2} \int \cot^4 x \, dx$$

أتعلم

لحلّ التكامل: $\int \cot^n x \, dx$ ، إذا كانت $n \geq 4$ ، حيث n عدد زوجي ، أكتب التكامل في الصورة الآتية:

$$\int \cot^n x \, dx = \int \cot^{n-2} x (\csc^2 x - 1) \, dx$$

أخطاء شائعة

يُخطئ بعض الطلبة أثناء الحلّ ، وذلك بعدم توزيع الإشارة السالبة التي تسبق التكامل: $\int (\csc^2 x - 1) \, dx$ على كل حدٍ من حدود الاقتران الأصلي الناتج.

$$\textcircled{3} \int \sec^4 x \tan^3 x \, dx$$

أتتحقق من فهمي:

أجد كلا من التكاملات الآتية:

$$\textcircled{a} \int \tan^4 x \, dx$$

$$\textcircled{b} \int \cot^5 x \, dx$$

$$\textcircled{c} \int \sec^4 x \tan^6 x \, dx$$

أتتحقق من فهمي:



أجد كل من التكاملين الآتين:

$$\textcircled{a} \int \sin^3 x \, dx$$

$$\textcircled{b} \int \cos^5 x \sin^2 x \, dx$$

أتعلم

- إذا كان أسُّ كلٍّ من الجيب وجيب التمام زوجيًا، فاستعمل متطابقات تقليص القوة لحلّ التكامل.
- إذا كان أحد الاقترانين مرفوعًا إلى أسٍّ فردي، فأعوّض الاقتران الآخر .
- إذا كان كلا الاقترانين مرفوعًا إلى أسٍّ فردي، فأعوّض الاقتران الذي أسُّه أكبر.

التكامل بالتعويض لاقترانات تتضمن الظلّ، أو ظلّ التمام، أو القاطع، أو قاطع التمام:

يُمكن استعمال التكامل بالتعويض لإيجاد تكاملات تحوي اقتران الظلّ، أو اقتران ظلّ التمام، أو القاطع، أو قاطع التمام، وتكون جميعها مرفوعة إلى أسٍّ صحيح موجب، إضافةً إلى استعمال المتطابقتين المثلثيتين: $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ ، و $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$.

مثال (6) أجد كلا من التكاملات الآتية:

$$\textcircled{1} \int \tan^3 x \, dx$$

قد لا يكون الطريق سهلًا، لكنه بالتأكيد يستحق كل خطوة تعب تمشيها فيه.

أدرب وأحل المسائل:



أجد كلا من التكاملات الآتية:

$$\textcircled{1} \int x^2(2x^3 + 5)^4 dx$$

$$\textcircled{2} \int x^2 \sqrt{x+3} dx$$

$$\textcircled{3} \int x(x+2)^3 dx$$

$$\textcircled{4} \int \frac{x}{\sqrt{x+4}} dx$$

$$\textcircled{5} \int e^{\sin x} \cos x dx$$

$$\textcircled{6} \int \frac{e^{3x}}{e^x + 1} dx$$

$$\textcircled{7} \int \sec^4 x dx$$

$$\textcircled{8} \int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx$$

التكامل بالتعويض للتكاملات المحدودة:

توجد طريقتان لإيجاد قيمة تكامل محدود بالتعويض؛ إحداهما: إيجاد التكامل أولاً بدلالة المُتغيّر الأصلي، ثم تعويض حدود التكامل، والأخرى: تغيير حدود التكامل عند تغيير مُتغيّر التكامل، وهذه الطريقة هي أكثر تفضيلاً.

إذا كان g' مُتّصلاً على

مثال (7) أجد كلا من التكاملين الآتين:

$$\textcircled{1} \int_0^{\pi/2} \cos x \sqrt{1 + \sin x} dx$$

$$\textcircled{2} \int_1^{25} \frac{x}{\sqrt{2x-1}} dx$$

أتحقق من فهمي:



أجد كل من التكاملين الآتين:

$$\textcircled{a} \int_0^2 x(x+1)^3 dx$$

$$\textcircled{b} \int_0^{\pi/3} \sec x \tan x \sqrt{\sec x + 2} dx$$

أجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$(19) \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\sin(\pi \ln x)}{x} dx$$

$$(20) \int_0^{\pi/2} x \sin x^2 dx$$

$$(21) \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$(22) \int_0^{\pi/3} \sec^2 x \tan^5 x dx$$

$$(23) \int_1^3 (x-1) e^{(x-1)^2} dx$$

$$(24) \int_1^4 \frac{\sqrt{2+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

$$(25) \int_0^1 \frac{10\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x^3})^2} dx$$

$$(26) \int_0^{\pi/6} 2^{\cos x} \sin x dx$$

$$(9) \int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$$

$$(10) \int \sin 2x (4 + \sin^2 x)^3 dx$$

$$(11) \int \frac{2e^x - 2e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} dx$$

$$(12) \int \frac{-x}{(x+1)\sqrt{x+1}} dx$$

$$(13) \int x \sqrt[3]{x+10} dx$$

$$(14) \int \left(\sec^2 \frac{x}{2} \tan^7 \frac{x}{2} \right) dx$$

$$(15) \int \frac{\sec^3 x + e^{\sin x}}{\sec x} dx$$

$$(16) \int (1 + \sqrt[3]{\sin x}) \cos^3 x dx$$

$$(17) \int \sin x \sec^5 x dx$$

$$(18) \int \frac{\sin x + \tan x}{\cos^3 x} dx$$

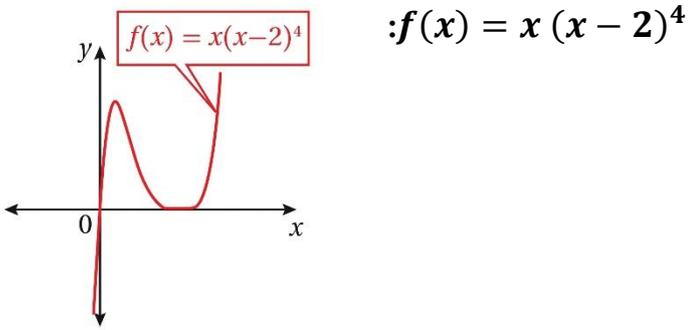
النجاح في التوجيهي يحتاج التزاماً يومياً، حتى في الأيام التي لا
تشر فيها بأي دافع.

في كلِّ ممَّا يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$ ،
ونقطة يمرُّ بها منحنى $y = f(x)$. أستعمل
المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

$$(32) f'(x) = 2x(4x^2 - 10)^2 ; (2, 10)$$

$$(33) f'(x) = x^2 e^{-0.2x^3} ; \left(0, \frac{3}{2}\right)$$

يبين الشكل المجاور جزءًا من منحنى الاقتران:



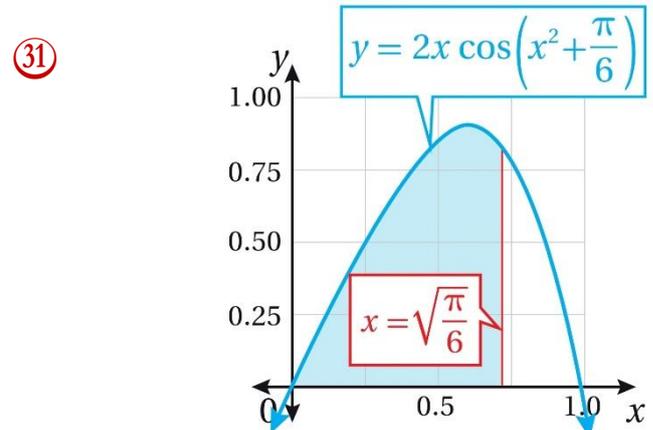
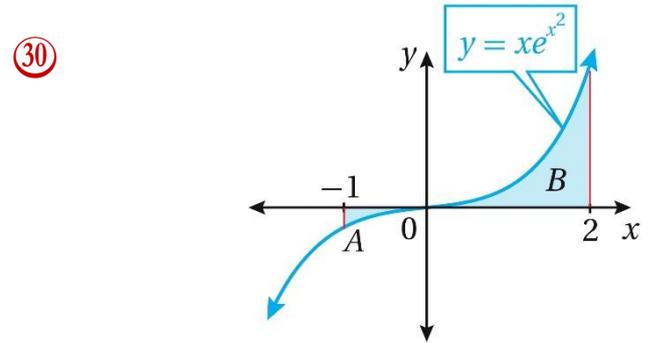
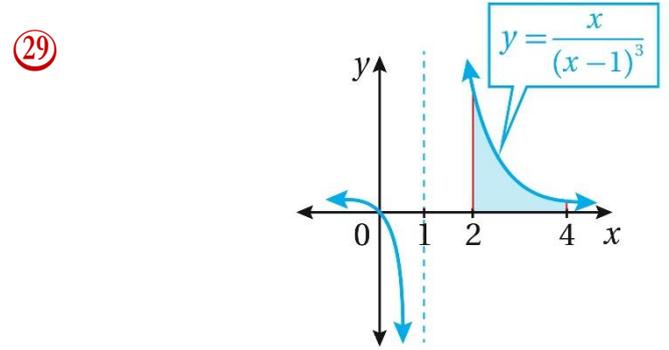
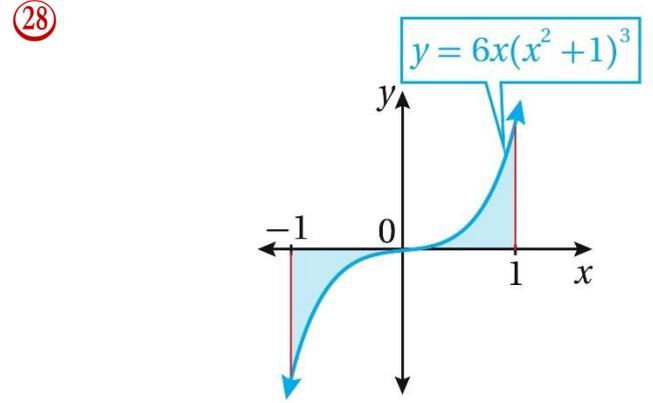
(34) أجد إحداثيي نقطة تماس الاقتران مع المحور x .

(35) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى
الاقتران $f(x)$ والمحور x .

(36) يتحرَّك جُسيم في مسار مستقيم ، وتعطى سرعته
بالاقتران: $v(t) = \sin \omega t \cos^2 \omega t$ ، حيث t
الزمن بالثواني ، و v سرعته بالمتري لكل ثانية ،
و ω ثابت. إذا انطلق الجُسيم من نقطة الأصل
فأجد موقعه بعد t ثانية.

$$(27) \int_{\pi/4}^{\pi/2} \csc^2 x \cot^5 x dx$$

أجد مساحة المنطقة المظلمة في كل
من التمثيلات البيانية الآتية:



42) ⚡️ 🧠 **تحذير:** أجد قيمة $\int_1^{16} \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}} dx$

إرشاد: افترض أن $u = 1 + x^{3/4}$ ، أو أن $u = x^{1/4}$.

43) 💡 **تبرير:** إذا كان: f اقترانًا مُتَّصِلًا، فأثبت أن:

$$\int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx$$

44) 💡 **تبرير:** إذا كان: a و b عددين حقيقيين موجبين، فأثبت أن:

$$\int_0^1 x^a (1-x)^b dx = \int_0^1 x^b (1-x)^a dx$$

⚡️ 🧠 **تحذير:** أجد كلا من التكاملات الآتية:

45) $\int \frac{dx}{x \ln x (\ln(\ln x))}$

46) $\int \sin 2x (1 + \sin x)^3 dx$

47) $\int \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} dx$

إرشاد للسؤال 47: ما المضاعف المشترك الأصغر لدليلي الجذرين؟

37) 🏥 **طب:** يُمثّل الاقتران $C(t)$ تركيز دواء في الدم بعد t دقيقة من حقنه في جسم مريض، حيث C مقيسة بالمليغرام لكل سنتيمتر مكعب (mg/cm^3). إذا كان تركيز الدواء لحظة حقنه في جسم المريض $0.5 mg/cm^3$ ، وأخذ يتغيّر مُعدّل: $C'(t) = \frac{-0.01 e^{-0.01t}}{(1 + e^{-0.01t})^2}$ ، فأجد $C(t)$.

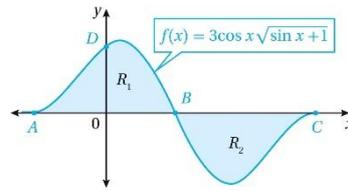


38) أجد قيمة: $\int_{\ln 3}^{\ln 4} \frac{e^{4x}}{e^x - 2} dx$ ، ثم أكتب الإجابة بالصيغة الآتية: $\frac{a}{b} + c \ln d$ ، حيث: a و b و c و d ثوابت صحيحة.

مهارات التفكير العليا:



💡 **تبرير:** إذا كان الشكل المجاور يُمثّل منحنى الاقتران: $f(x) = 3 \cos x \sqrt{\sin x + 1}$ ، فأجيب عن الأسئلة الآتية تبعًا:



39) أجد إحداثيي كل من النقاط: A و B و C و D .

40) أجد مساحة المنطقة المُظَلَّلة.

41) أبتين أن المنطقة R_1 والمنطقة R_2 المساحة نفسها.

أجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$\textcircled{10} \int_6^{20} \frac{8x}{\sqrt{4x+1}} dx$$

$$\textcircled{11} \int_2^5 \frac{1}{1+\sqrt{x-1}} dx$$

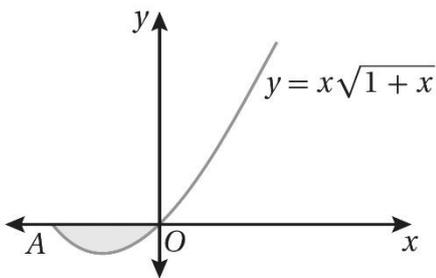
$$\textcircled{12} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+\cos x} dx$$

$$\textcircled{13} \int_1^4 \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}} dx$$

$$\textcircled{14} \int_0^{\pi/4} \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx$$

$$\textcircled{15} \int_0^{\pi/3} \cos^2 x \sin^3 x dx$$

16 يُبيّن الشكل المجاور جزءًا من منحنى الاقتران: $f(x) = x\sqrt{x+1}$ أجد مساحة المنطقة المظلّلة في هذا الشكل.



كتاب التمارين

أجد كلا من التكاملات الآتية:

$$\textcircled{1} \int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} dx$$

$$\textcircled{2} \int \left(1 - \cos \frac{x}{2}\right)^2 \sin \frac{x}{2} dx$$

$$\textcircled{3} \int \csc^5 x \cos^3 x dx$$

$$\textcircled{4} \int x \sin x^2 dx$$

$$\textcircled{5} \int x^3 (x+2)^7 dx$$

$$\textcircled{6} \int \frac{\ln \sqrt{x}}{x} dx$$

$$\textcircled{7} \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

$$\textcircled{8} \int \frac{\sin(\ln 4x^2)}{x} dx$$

$$\textcircled{9} \int \sec^2 x \cos^3 x (\tan x) dx$$

في كلِّ ممَّا يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$ ،
ونقطة يمرُّ بها منحنى $y = f(x)$. أستعمل
المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

$$\textcircled{17} f'(x) = 16 \sin x \cos^3 x ; \left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$$

$$\textcircled{18} f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}} ; (2, 1)$$

$\textcircled{19}$ يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم ، وتعطى سرعته
بالاقتران: $v(t) = \frac{-2t}{(1+t^2)^{3/2}}$ ، حيث t الزمن
بالثواني ، و v سرعته بالمتر لكل ثانية. إذا كان
الموقع الابتدائي للجُسَيْم هو 4 m ، فأجد موقع
الجُسَيْم بعد t ثانية.

الدرس الثالث: تكامل بالكسور الجزئية



وبما أنّ عملية تجزئة المقادير النسبية تعتمد على عوامل المقام، فإنّه توجد حالات للتكامل بالكسور الجزئية بناءً على نوع عوامل المقام، مثل الحالات الثلاث الآتية التي سأتعلمها في هذا الدرس:

- ✦ عوامل المقام كثيرات حدود خطية مختلفة.
- ✦ عوامل المقام كثيرات حدود خطية، أحدها مُكرّر.
- ✦ عوامل المقام كثيرات حدود، أحدها تربيعي غير قابل للتحليل (مُميّزه سالب)، وغير مُكرّر.



التكامل بالكسور الجزئية: عوامل المقام كثيرات حدود خطية مختلفة:

تعلمت سابقاً أنّه إذا كانت جميع عوامل كثير الحدود في مقام المقدار النسبي $\frac{P(x)}{Q(x)}$ خطية ومختلفة، وكانت درجة البسط أقلّ من درجة المقام، ولا توجد بينهما عوامل مشتركة، فإنّ كلاً منها يُقابل كسراً جزئياً، بسطه ثابت، ومقامه عامل خطي؛ أي إنّ:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \frac{A_3}{a_3x+b_3} + \dots + \frac{A_n}{a_nx+b_n}$$

ألاحظ أنّ تكامل كلٍّ من الكسور الجزئية الناتجة في هذه الحالة هو اقتران لوغاريتمي طبيعي.



مثال (1) أجد: $\int \frac{x-5}{x^2-x-2} dx$



التكامل بالكسور الجزئية:

تعلمت سابقاً أنّ الاقترانات النسبية هي اقترانات يُمكن كتابتها في صورة نسبة بين كثيري حدود، مثل: $\frac{f(x)}{g(x)}$ ، حيث: $g(x) \neq 0$ ، ومن أمثلتها:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2-1}$$

$$g(x) = \frac{x^5+2x^3-x}{x^2-4x+8}$$

$$h(x) = \frac{1}{x^2-3x-4}$$

تعلمت أيضاً تجزئة المقادير النسبية؛ وهي عملية تُفضي إلى كتابة المقدار النسبي في صورة مجموع مقادير نسبية أبسط، كلٌّ منها في صورة: $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ، حيث P و Q كثيرات حدود لا توجد بينهما عوامل مشتركة، ودرجة P أقلّ من درجة Q ، وكلٌّ منهما يُسمى كسراً جزئياً.

كسر جزئي كسر جزئي

$$\frac{x+14}{(x-4)(x+2)} = \frac{3}{x-4} + \frac{-2}{x+2}$$

تجزئة المقدار النسبي

يمكن استعمال تجزئة المقادير النسبية لإيجاد تكامل اقترانات نسبية بطريقة تُسمى **التكامل بالكسور الجزئية** (integration by partial fractions).

أتعلم

تقوم طريقة التكامل بالكسور الجزئية على تحويل الاقتران النسبي إلى مجموع اقترانات نسبية أبسط.

أتحقق من فهمي:



أجد كل من التكاملين الآتيين:

$$(a) \int \frac{x+4}{(2x-1)(x-1)^2} dx$$

$$(b) \int \frac{x^2-2x-4}{x^3-4x^2+4x} dx$$

التكامل بالكسور الجزئية: عوامل المقام
كثيرات حدود، أحدها تربيعي غير قابل
للتحليل، وغير مُكترَّر:

تعلّمتُ سابقًا أن تحليل مقام المقدار النسبي قد
يحتوي عاملًا تربيعيًا غير مُكترَّر، ولا يُمكن تحليله
(مُميّزه سالب). وفي هذه الحالة، ينتج من العامل
التربيعي كسر جزئي، بسطه كثير حدود خطّي في
صورة: $Ax + B$ ، ومقامه العامل التربيعي نفسه.



مثال (3) أجد: $\int \frac{5x^2-4x+2}{(x-1)(x^2+2)} dx$

أتحقق من فهمي:



أجد كل من التكاملين الآتيين:

$$(a) \int \frac{3x+4}{(x-3)(x^2+4)} dx$$

$$(b) \int \frac{7x^2-x+1}{x^3+1} dx$$

أتحقق من فهمي:



أجد كل من التكاملين الآتيين:

$$(a) \int \frac{x-7}{x^2-x-6} dx$$

$$(b) \int \frac{3x-1}{x^2-1} dx$$

التكامل بالكسور الجزئية: عوامل المقام
كثيرات حدود خطّية، أحدها مُكترَّر:

تعلّمتُ سابقًا أنّه إذا كان التحليل الكامل لمقام
مقدار نسبي يحوي عاملًا خطّيًا مُكترَّرًا n من المرات،
فإنّ هذا العامل يُقابل n من الكسور الجزئية التي
تكون في صورة:

$$\frac{A_1}{(ax+b)^1} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + \dots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

ألاحظ أنّ جميع الكسور الناتجة تُفضي إلى اقتران
تكامله اقتران لوغاريتمي طبيعي، أو تكامل:
 $(ax+b)^{-n}$ المضروب في ثابت.



مثال (2) أجد: $\int \frac{3x^2+2}{x^3-2x^2+x} dx$

التكامل بالكسور الجزئية لتكاملات محدودة:

يُمكن إيجاد تكاملات محدودة بالكسور الجزئية، وذلك بإجراء التكامل أوَّلاً، ثمَّ التعويض في حدود التكامل.

مثال (5) أجد: $\int_0^2 \frac{x-2}{x^2+5x+4} dx$



أتحقق من فهمي:



أجد كل من التكاملين الآتيين:

a) $\int_3^4 \frac{2x^3 + x^2 - 2x - 4}{x^2 - 4} dx$

b) $\int_5^6 \frac{3x - 10}{x^2 - 7x + 12} dx$



التكامل بالكسور الجزئية: درجة كثير الحدود في البسط مُساوية لدرجة كثير الحدود في المقام، أو أكبر منها:

تعلَّمتُ في الأمثلة السابقة إيجاد تكاملات لاقترانات نسبية مختلفة في صورة: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ، بحيث لا توجد عوامل مشتركة بين $P(x)$ و $Q(x)$ ، وتكون درجة $P(x)$ أقلَّ من درجة $Q(x)$. ولكنْ ، إذا كانت درجة $P(x)$ مُساوية لدرجة $Q(x)$ ، أو أكبر منها، فإنَّه يلزم تبسيط الاقتران النسبي بقسمة P على Q ، ثمَّ إيجاد التكامل بالكسور الجزئية إذا لزم.

مثال (4) أجد: $\int \frac{3x^4 - 1}{x^2 - 1} dx$

أتذكر

إذا كان $\frac{f(x)}{g(x)}$ اقتراناً نسبياً فيه درجة $f(x)$ أكبر من (أو تساوي) درجة $g(x)$ ، وكان ناتج القسمة $q(x)$ ، وباقي القسمة $r(x)$ ، فإنَّ: $\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$



أتحقق من فهمي:



أجد كل من التكاملين الآتيين:

a) $\int \frac{4x^3 - 5}{2x^2 - x - 1} dx$

b) $\int \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - x} dx$



كل تعب تشعر به الآن هو دليل أنك تبني شيئاً عظيماً.



أدرب وأحل المسائل:



أجد كلا من التكاملات الآتية:

$$\textcircled{1} \int \frac{x-10}{x(x+5)} dx$$

$$\textcircled{2} \int \frac{2}{1-x^2} dx$$

$$\textcircled{3} \int \frac{4}{(x-2)(x-4)} dx$$

$$\textcircled{4} \int \frac{3x+4}{x^2+x} dx$$

$$\textcircled{5} \int \frac{x^2}{x^2-4} dx$$

$$\textcircled{6} \int \frac{3x-6}{x^2+x-2} dx$$

$$\textcircled{7} \int \frac{4x+10}{4x^2-4x-3} dx$$

$$\textcircled{8} \int \frac{2x^2+9x-11}{x^3+2x^2-5x-6} dx$$

$$\textcircled{9} \int \frac{4x}{x^2-2x-3} dx$$

التكامل بالكسور الجزئية، والتكامل بالتعويض:

تعلّمتُ في الدرس السابق أنّه يُمكن استعمال التعويض لحلّ تكاملات يصعب حلّها في صورتها الأصلية. والآن سأتعلم كيف أنّ عملية التعويض في بعض التكاملات قد تُفضي إلى اقتران نسبي يُمكن حلّه باستعمال الكسور الجزئية.

مثال (6) أجد كل من التكاملين الآتين:

$$\textcircled{1} \int \frac{e^x}{e^{2x}-e^x} dx$$

$$\textcircled{2} \int \frac{\sqrt{x}}{x-16} dx$$

—————

أتحقق من فهمي:



أجد كل من التكاملين الآتين:

$$\textcircled{a} \int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x - 1} dx$$

$$\textcircled{b} \int \frac{e^x}{(e^x-1)(e^x+4)} dx$$

—————

النجاح لا يحتاج أن تكون الأفضل منذ البداية، بل أن تبقى حتى النهاية.

أجد قيمة كل التكاملات الآتية:

$$(19) \int_2^4 \frac{6 + 3x - x^2}{x^3 + 2x^2} dx$$

$$(20) \int_{-1/3}^{1/3} \frac{9x^2 + 4}{9x^2 - 4} dx$$

$$(21) \int_0^1 \frac{17 - 5x}{(2x + 3)(2 - x)^2} dx$$

$$(22) \int_1^4 \frac{4}{16x^2 + 8x - 3} dx$$

$$(23) \int_3^4 \frac{5x + 5}{x^2 + x - 6} dx$$

$$(24) \int_3^4 \frac{4}{x^3 - 4x^2 + 4x} dx$$



$$(10) \int \frac{8x^2 - 19x + 1}{(2x + 1)(x - 2)^2} dx$$

$$(11) \int \frac{9x^2 - 3x + 2}{9x^2 - 4} dx$$

$$(12) \int \frac{x^3 + 2x^2 + 2}{x^2 + x} dx$$

$$(13) \int \frac{x^2 + x + 2}{3 - 2x - x^2} dx$$

$$(14) \int \frac{2x - 4}{(x^2 + 4)(x + 2)} dx$$

$$(15) \int \frac{x^2 - 4x^2 - 2}{x^3 + x^2} dx$$

$$(16) \int \frac{3 - x}{2 - 5x - 12x^2} dx$$

$$(17) \int \frac{3x^3 + 2x^2 + 12}{x^4 + 6x^2} dx$$

$$(18) \int \frac{5x - 2}{(x - 2)^2} dx$$



أجد كلا من التكاملات الآتية:

$$(29) \int \frac{\sin x}{\cos x + \cos^2 x} dx$$

$$(30) \int \frac{1}{x^2 + x\sqrt{x}} dx$$

$$(31) \int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 3e^x + 2} dx$$

$$(32) \int \frac{\cos x}{\sin x (\sin^2 x - 4)} dx$$

مهارات التفكير العليا:



تبرير: أحلّ السؤالين الآتيين تبعاً:

(33) أجد: $\int \frac{dx}{1+e^x}$ بطريقتين مختلفتين، إحداهما الكسور الجزئية، ثم أبرد إجابتي.

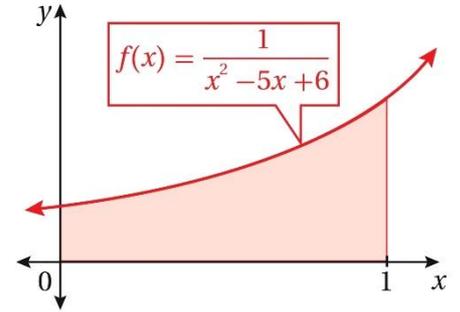
$$(34) \text{ أجد: } \int_0^{\ln 2} \frac{1}{1+e^x} dx$$

(35) تبرير: أثبت أن:

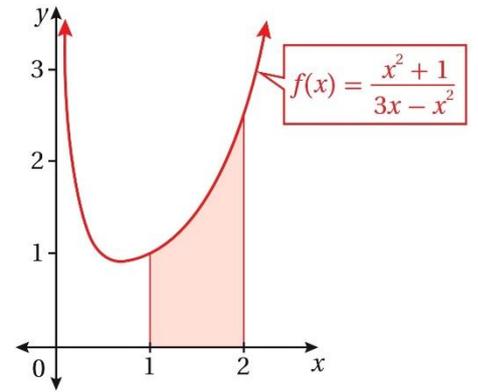
$$\int_4^9 \frac{5x^2 - 8x + 1}{2x(x-1)^2} dx = \ln\left(\frac{32}{3}\right) - \frac{5}{24}$$

أجد مساحة المنطقة المظلمة في كل من التمثيلين البيانيين الآتين:

(25)

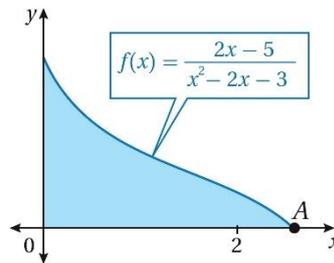


(26)



يبين الشكل المجاور جزءاً من منحنى الاقتران:

$$f(x) = \frac{2x-5}{x^2-2x-3}$$



(27) أجد إحداثيي النقطة A.

(28) أوجد مساحة المنطقة المظلمة.

$$\textcircled{3} \int \frac{x^2 - 3x + 8}{x^3 - 3x - 2} dx$$

$$\textcircled{4} \int \frac{x - 10}{x^2 - 2x - 8} dx$$

$$\textcircled{5} \int \frac{2x^2 + 6x - 2}{2x^2 + x - 1} dx$$

$$\textcircled{6} \int \frac{2x^2 - x + 6}{(x^2 + 2)(x + 1)} dx$$

$$\textcircled{7} \int \frac{8x + 24}{(x + 1)(x - 3)^2} dx$$

$$\textcircled{8} \int \frac{8x}{x^3 + x^2 - x - 1} dx$$

$$\textcircled{9} \int \frac{4}{x^3 - 2x^2} dx$$

أجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$\textcircled{10} \int_1^5 \frac{x - 1}{x^2(x + 1)} dx$$

$$\textcircled{11} \int_7^{12} \frac{4 - x}{(x - 2)^2} dx$$

36) تبرير: أثبت أن:

$$\int_9^{16} \frac{2\sqrt{x}}{x - 4} dx = 4 \left(1 + \ln \left(\frac{5}{3} \right) \right)$$

37) تبرير: أثبت أن:

$$\int_0^1 \frac{4x^2 + 9x + 4}{2x^2 + 5x + 3} dx = 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{5}{12}$$

تحدّ: أجد كل من التكاملات الآتية:

$$\textcircled{38} \int \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}{x} dx$$

$$\textcircled{39} \int \frac{x}{16x^4 - 1} dx$$

$$\textcircled{40} \int \frac{2x}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)^2} dx$$

« كتاب التمارين »

أجد كلا من التكاملات الآتية:

$$\textcircled{1} \int \frac{4}{x^2 + 4x} dx$$

$$\textcircled{2} \int \frac{6}{x^2 - 9} dx$$

أجد كلا من التكاملات الآتية:

$$(18) \int \frac{e^{2x} + e^x}{(e^{2x} + 1)(e^x - 1)} dx$$

$$(19) \int \frac{5 \cos x}{\sin^2 x + 3 \sin x - 4} dx$$

$$(20) \int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x + 5 \tan x + 6} dx$$

$$(21) \text{ أثبت أن: } \int_0^1 \frac{4x}{x^2 - 2x - 3} dx = \ln\left(\frac{16}{27}\right)$$

$$(22) \text{ أثبت أن: } \int_1^p \frac{1}{2x^2 + x - 1} dx = \frac{1}{3} \ln \frac{4p - 2}{p + 1}$$

، حيث: $p > 1$.

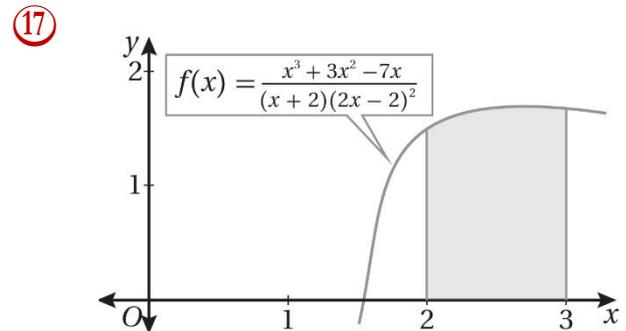
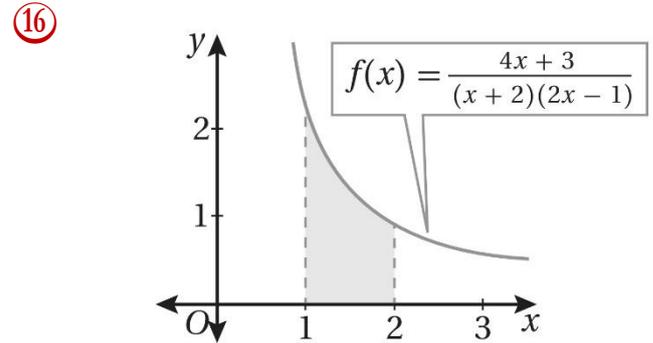
$$(12) \int_1^2 \frac{4}{x^2 + 8x + 15} dx$$

$$(13) \int_1^2 \frac{10x^2 - 26x + 10}{2x^2 - 5x} dx$$

$$(14) \int_2^5 \frac{25}{(x + 1)(2x - 3)^2} dx$$

$$(15) \int_0^2 \frac{x^2 - 3x + 10}{x^2 - x - 6} dx$$

أجد مساحة المنطقة المظلمة في كل من التمثيلين البيانيين الآتين:



الدرس الرابع: التكامل بالأجزاء



بالتبسيط

$$\int u dv = uv - \int v du$$

يُمكن استعمال الصيغة الآتية:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

ضرب اقترايين، في ما يُعرَف بطريقة **التكامل بالأجزاء** (integration by parts).

التكامل بالأجزاء

مفهوم أساسي

إذا كان u و v اقترايين قابلين للاشتقاق، فإن:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

يُمكن تلخيص خطوات إيجاد التكامل بالأجزاء على النحو الآتي:

مفهوم أساسي خطوات إيجاد التكامل بالأجزاء

لإيجاد التكامل $\int f(x) du$ بالأجزاء، أتبع الخطوات الثلاث الآتية:

الخطوة (1): اختيار اقترايين: u و v ، بحيث $du = f(x) dx$ ، ومراعاة أن تكون dv أبسط من u عند اختيار u ، وأن يكون سهلاً إيجاد تكامل dv .

الخطوة (2): تنظيم خطوات إيجاد du و v كما يلي:

$$\begin{array}{l} u \quad \quad \quad dv \\ du \quad \quad v = \int dv \end{array}$$

الخطوة (3): إكمال التكامل بإيجاد $\int v du$.

$$\int f(x) dx = \int u dv = uv - \int v du$$

التكامل بالأجزاء:

تعلّمت سابقاً استعمال طريقتي التكامل بالتعويض، والكسور الجزئية، إلا أنه لا يُمكن استعمال أيٍّ من هاتين الطريقتين لإيجاد التكاملات الآتية:

$$\int x \sin x dx, \int e^x \cos x dx, \int x^2 \ln x dx$$

ألاحظ أن المُكامل في التكاملات السابقة هو ناتج ضرب اقترايين مختلفين، يُمكن إيجاد تكامل كلٍّ منهما على حدة، إلا أنه لا توجد قاعدة لإيجاد تكامل ضربهما بصورة مباشرة.

أتعلم

لا يُمكن توزيع التكامل على الضرب؛ أي لا يُمكن إيجاد تكامل كل اقتران بصورة منفصلة وضرب النتيجة.

يُمكن الاستفادة من قاعدة مشتقة الضرب في إيجاد طريقة لتكامل هذا النوع من الاقترايات على النحو الآتي:

إذا كان u و v اقترايين قابلين للاشتقاق بالنسبة إلى x فإن مشتقة ضربهما هي:

$$\frac{d}{dx} (uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

وبمُكاملة طرفي المعادلة بالنسبة إلى x ، تنتج المعادلة الآتية:

بمُكاملة طرفي المعادلة

$$uv = \int u \frac{dv}{dx} dx + \int v \frac{du}{dx} dx$$

بإعادة ترتيب المعادلة

$$\int u \frac{dv}{dx} dx = uv - \int v \frac{du}{dx} dx$$

أتحقق من فهمي:



أجد كلا من التكاملات الآتية:

(a) $\int x \sin x \, dx$

(b) $\int x^2 \ln x \, dx$

(c) $\int 2x \sqrt{7-3x} \, dx$

(d) $\int 3x e^{4x} \, dx$



تكرار التكامل بالأجزاء:

يتطلب إيجاد بعض التكاملات استعمال التكامل بالأجزاء أكثر من مرة كما في المثال الآتي.



مثال (2) أجد: $\int x^2 e^{2x} \, dx$.



أتحقق من فهمي:



أجد كل من التكاملين الآتيين:

(a) $\int x^2 \sin x \, dx$

(b) $\int x^3 e^{4x} \, dx$



أتعلم

بوجه عام، لا توجد قاعدة ثابتة للحالات التي يُستعمل فيها التكامل بالأجزاء، إلا أنني سأتعلم في أمثلة هذا الدرس معظم الحالات التي تُستعمل فيها هذه الطريقة.



مثال (1) أجد كلا من التكاملات الآتية:

(1) $\int x \cos x \, dx$

أتعلم

تحتوي dv دائماً على dx من التكامل الأصلي.

أفكر

هل اختيار $u = \cos x$ و $dv = x \, dx$ يجعل التكامل أسهل أم أكثر تعقيداً؟ أبرر إجابتي.

(2) $\int \ln x \, dx$

أتعلم

إذا كان ناتج تطبيق صيغة التكامل بالأجزاء يحوي تكاملاً أكثر تعقيداً من التكامل الأصلي، فإنني أبحث عن اختيار آخر لـ u و dv .

(3) $\int x (2x + 7)^5 \, dx$

(4) $\int x e^{3-x} \, dx$

أتعلم

إذا كان $g(x)$ افتراضاً خطياً، وكان $f(x)$ كثير حدود، فاستعمل التكامل بالأجزاء في كلِّ من الحالات الآتية:

- $\int f(x) e^{g(x)} \, dx$
- $\int f(x) \sin(g(x)) \, dx$
- $\int f(x) \cos(g(x)) \, dx$

أتعلم

يُمكن استعمال طريقة الجدول لإيجاد التكاملات التي صورها:

- $\int f(x) \sin ax \, dx$
- $\int f(x) \cos ax \, dx$
- $\int f(x) (ax + b)^n \, dx$
- $\int f(x) e^{ax} \, dx$

حيث $f(x)$ كثير حدود، و $a \neq 0$ ، و $n > 0$.



مثال (4) أجد: $\int x^3 \sin x \, dx$.



أتتحقق من فهمي:



أجد كل من التكاملين الآتيين:

(a) $\int x^4 \cos 4x \, dx$

(b) $\int x^5 e^x \, dx$



التكاملات الدورية:

إذا نتج من تكرار التكامل بالأجزاء تكاملٌ مُطابق للتكامل الأصلي، فإنَّ التكامل يكون دوريًّا، ويُمكن عندئذٍ إيجاد التكامل جبريًّا بطريقة مُشابهة لحلِّ المعادلات.



مثال (3) أجد: $\int e^x \cos x \, dx$.



أتتحقق من فهمي:



أجد كل من التكاملين الآتيين:

(a) $\int \frac{\sin x}{e^x} \, dx$

(b) $\int \sec^3 x \, dx$



تكرار التكامل بالأجزاء باستعمال طريقة الجدول:

تعلَّمتُ في مثال سابق أنَّه يُمكن إيجاد تكامل في صورة: $\int f(x) g(x) \, dx$ ، وذلك بتكرار استعمال التكامل بالأجزاء إذا أمكن اشتقاق f بصورة مُتكرِّرة حتى يصبح 0، ومُكاملة $g(x)$ على نحوٍ مُتكرَّر بسهولة. ولكن، إذا تطلَّب الأمر تكرار التكامل بالأجزاء مرَّات عديدة، فإنَّ ذلك يجعل إيجاد الناتج عملية مُعقَّدة، تتطلَّب إجراء كثير من الخطوات. وفي هذه الحالة، يُمكن استعمال طريقة الجدول (tabular integration) لتنظيم خطوات الحلِّ.

التكامل بالأجزاء لتكاملات محدودة:

يُمكن إيجاد تكاملات محدودة باستعمال طريقة الأجزاء، وذلك بإجراء التكامل أوَّلًا، ثمَّ التعويض في حدود التكامل باستعمال الصيغة الآتية:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$



مثال (6) أجد: $\int_1^2 x^3 \ln x dx$



أتحقق من فهمي:



أجد كل من التكاملين الآتيين:

a) $\int_0^1 x e^{-2x} dx$

b) $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$



يُمكن نمذجة كثير من المواقف الحياتية والعلمية باستعمال اقترانات عديدة. وعند إيجاد التكامل لهذه الاقترانات تنتج قيم أو علاقات مُهمّة في تلك المواقف الحياتية والعلمية، ولكن إجراء التكامل لبعض هذه الاقترانات يتطلّب استعمال التكامل بالأجزاء.



مثال (5) من الحياة:



الربح الحديّ: يُمثّل الاقتران:

$$P'(x) = 1000 x^2 e^{-0.2x}$$

الربح الحديّ (بالدينار) لكل

مُكيّف تباعه إحدى الشركات، حيث x عدد المُكيّفات المبيّعة، و $P(x)$ مقدار الربح بالدينار عند بيع x مُكيّفًا. أجد اقتران الربح $P(x)$ ، علمًا بأن $P(0) = -2000$



أتحقق من فهمي:



التكلفة الحديّة: يُمثّل الاقتران:

$$C'(x) = (0.1x + 1) e^{0.03x}$$

لكل قطعة (بالدينار) تُنتج في إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المُنتجة، و $C(x)$ تكلفة إنتاج x قطعة بالدينار. أجد اقتران التكلفة $C(x)$ ، علمًا

$$C(10) = 200$$



ملخص المفهوم التكامل بطريقة الأجزاء، واختيار u

| الاقتران المضروبان | اختيار u | أمثلة |
|---|-----------------------------|---------------------------------|
| x^n ، حيث n عدد صحيح موجب، مضروبًا في اقتران مثلثي. | x^n | $x \cos x$ $x^2 \sin x$ |
| x^n ، حيث n عدد صحيح موجب، مضروبًا في اقتران أسّي طبيعي. | x^n | $x e^x$ $x^3 e^{-x}$ |
| x^n ، حيث n عدد صحيح موجب، مضروبًا في اقتران لوغاريتمي طبيعي. | الاقتان اللوغاريتمي الطبيعي | $x \ln x$ $x^{2/3} \ln x$ |
| اقتران أسّي طبيعي، مضروبًا في اقتران مثلثي. | أيّ منهما | $e^x \cos x$ $e^{-x} \sin x$ |

أُتدرب وأحل المسائل:



أُجد كلا من التكاملات الآتية:

① $\int (x + 1) \cos x \, dx$

② $\int x e^{x/2} \, dx$

③ $\int (2x^2 - 1) e^{-x} \, dx$

④ $\int x \ln(1 + x) \, dx$

التكامل بالأجزاء، والتكامل بالتعويض:

تعلّمتُ سابقًا استعمال التعويض لحلّ تكاملات يصعب حلّها بصورة مباشرة. والآن سأتعلم كيف أحلُّ بعض التكاملات باستعمال طريقة التعويض وطريقة الأجزاء معًا.



مثال (7) أجد: $\int e^{\sqrt{x}} \, dx$.

أتعلم

بوجه عام، إذا كان أسُّ الاقتران الأسّي غير خطّي، أو كانت زاوية الاقتران المثلثي غير خطّية، فإنني أبدأ بتعويضها.

أتحقق من فهمي:



أجد كل من التكاملين الآتين:

a $\int (x^3 + x^5) \sin x^2 \, dx$

b $\int x^5 e^{x^2} \, dx$

ألاحظ من الأمثلة السابقة أنّ إيجاد التكامل بالأجزاء يعتمد على تحديد الاقتران المراد اشتقاقه لتبسيط التكامل. ويُبيّن الجدول الآتي تكاملات مختلفة يُمكن حلّها بطريقة الأجزاء، والاختيار الأفضل لـ u .

$$\textcircled{15} \int e^x \ln(1 + e^x) dx$$



أجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$\textcircled{16} \int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx$$

$$\textcircled{17} \int_1^e \ln x^2 dx$$

$$\textcircled{18} \int_1^2 \ln(xe^x) dx$$

$$\textcircled{19} \int_{\pi/12}^{\pi/9} x \sec^2 3x dx$$

$$\textcircled{20} \int_1^e x^4 \ln x dx$$

$$\textcircled{21} \int_0^{\pi/2} x^2 \sin x dx$$

$$\textcircled{22} \int_0^1 x(e^{-2x} + e^{-x}) dx$$

$$\textcircled{23} \int_0^1 \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx$$

$$\textcircled{5} \int x \sin x \cos x dx$$

$$\textcircled{6} \int x \sec x \tan x dx$$

$$\textcircled{7} \int \frac{x}{\sin^2 x} dx$$

$$\textcircled{8} \int \frac{\ln x}{x^3} dx$$

$$\textcircled{9} \int 2x^2 \sec^2 x \tan x dx$$

$$\textcircled{10} \int (x-2) \sqrt{8-x} dx$$

$$\textcircled{11} \int x^3 \cos 2x dx$$

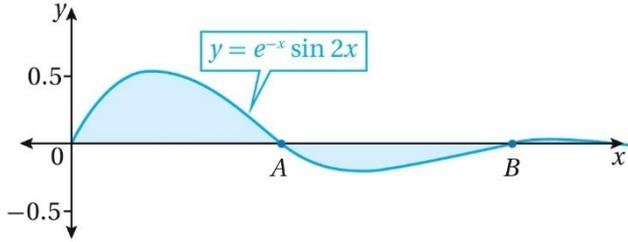
$$\textcircled{12} \int \frac{x}{6^x} dx$$

$$\textcircled{13} \int e^{3x} \cos x dx$$

$$\textcircled{14} \int \cos x \ln \sin x dx$$

لا تنتظر الظروف المثالية، فالتوجيهي يُنجز في ظروف صعبة.

إذا كان الشكل المجاور يُمثّل منحنى الاقتران:
 $f(x) = e^{-x} \sin 2x$ ، حيث: $x \geq 0$ ، فأجيب
 عن السؤالين الآتيين تبعًا:



33) أجد إحداثيي كلٍّ من النقطة A ، والنقطة B .

34) أجد مساحة المنطقة المُظَلَّلة.

35) يتحرّك جُسيم في مسار مستقيم ، وتعطى سرعته
 بالاقتران: $v(t) = t e^{-t/2}$ ، حيث t الزمن بالثواني،
 و v سرعته بالمتراً لكل ثانية ، إذا بدأ الجُسيم
 الحركة من نقطة الأصل فأجد موقعه بعد t ثانية.

في كلِّ ممّا يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$ ،
 ونقطة يمرُّ بها منحنى $y = f(x)$. أستعمل
 المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

36) $f'(x) = (x + 2) \sin x$; $(0, 2)$

37) $f'(x) = 2x e^{-x}$; $(0, 3)$

24) $\int_0^1 x 3^x dx$

أجد كلا من التكاملات الآتية:

25) $\int x^3 e^{x^2} dx$

26) $\int \cos(\ln x) dx$

27) $\int x^3 \sin x^2 dx$

28) $\int e^{\cos x} \sin 2x dx$

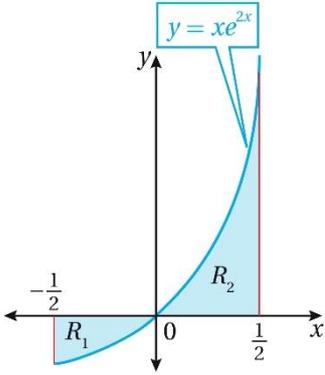
29) $\int \sin \sqrt{x} dx$

30) $\int \frac{x^3 e^{x^2}}{(x^2 + 1)^2} dx$

31) $\int \ln(9 - x^2) dx$

32) $\int \frac{4 \ln x}{(x - 1)^3} dx$

تبرير: إذا كان الشكل المجاور يُمثل منحى الاقتران: $y = x e^{2x}$ ، حيث: $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تبعاً:



43) أجد مساحة كلٍّ من المنطقة R_1 ، والمنطقة R_2 .

44) أثبت أن مساحة المنطقة R_1 إلى مساحة المنطقة R_2 تساوي $e : (e - 2)$.

تحذير: أستعمل التكامل بالأجزاء لإثبات كلِّ ممَّا يأتي ، حيث: n عدد صحيح موجب ، و $a \neq 0$:

$$45) \int x^n \ln x \, dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} (-1 + (n+1) \ln x) + C$$

$$46) \int x^n e^{ax} \, dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} \, dx$$

38) **دورة تدريبية:** تقدّمت دعاء لدورة تدريبية متقدّمة في الطباعة. إذا كان عدد الكلمات التي تطبعها دعاء في الدقيقة يزداد بمعدّل: $N'(t) = (t + 6) e^{-0.25 t}$ ، حيث $N(t)$ عدد الكلمات التي تطبعها دعاء في الدقيقة بعد t أسبوعاً من التحاقها بالدورة، فأجد $N(t)$ ، علماً بأنّ دعاء كانت تطبع 40 كلمة في الدقيقة عند بدء الدورة.



مهارات التفكير العليا:



39) **تبرير:** أثبت أنّ:

$$\int_{1/2}^3 x^2 \ln 2x \, dx = 9 \ln 6 - \frac{215}{72}$$

40) **تبرير:** أثبت أنّ:

$$\int_0^{\pi/4} x \sin 5x \sin 3x \, dx = \frac{\pi - 2}{16}$$

41) **تبرير:** إذا كان: $\int_0^a x e^{x/2} \, dx = 6$ ، فأثبت أنّ a يُحقّق المعادلة: $x = 2 + e^{-x/2}$.

42) **تبرير:** أجد قيمة $\int (\ln x)^2 \, dx$ بطريقتين مختلفتين، ثمّ أبرد إجابتي.

كتاب التمارين

أجد كلا من التكاملات الآتية:

$$\textcircled{9} \int_0^{\pi} x \cos \frac{1}{4} x \, dx$$

$$\textcircled{10} \int_0^{\pi/4} e^{3x} \cos 2x \, dx$$

$$\textcircled{11} \int_1^e \ln(x+1) \, dx$$

$$\textcircled{12} \int_0^1 x^2 e^x \, dx$$

$$\textcircled{13} \text{ أثبت أن: } \int_2^4 \ln x \, dx = 6 \ln 2 - 2$$

$$\textcircled{1} \int x \cos 4x \, dx$$

$$\textcircled{2} \int x \sqrt{x+1} \, dx$$

$$\textcircled{3} \int x e^{-x} \, dx$$

$$\textcircled{4} \int (x^2 + 1) \ln x \, dx$$

$$\textcircled{5} \int \ln x^3 \, dx$$

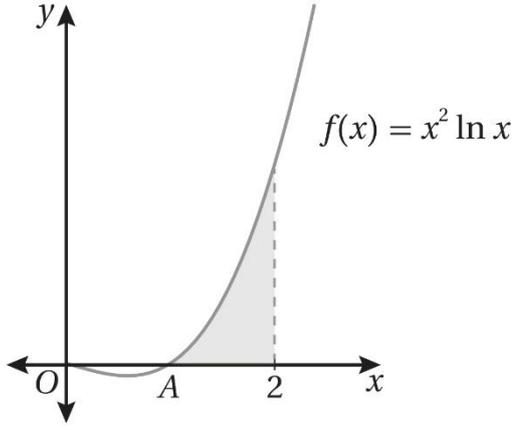
$$\textcircled{6} \int e^{2x} \sin x \, dx$$

$$\textcircled{7} \int_1^e \ln x \, dx$$

$$\textcircled{8} \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} \, dx$$

أجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

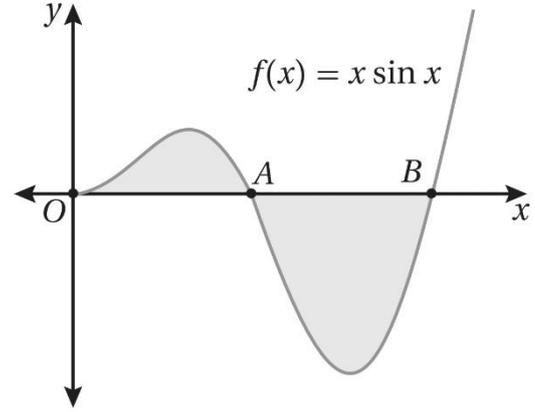
إذا كان الشكل المجاور يُمثّل منحنى الاقتران:
 حيث: $f(x) = x^2 \ln x$ ، $x > 0$ ، فأجيب عن
 السؤالين الآتيين تبعًا:



16) أجد إحداثيي كلٍّ من النقطة A .

17) أجد مساحة المنطقة المُظَلَّلة.

إذا كان الشكل المجاور يُمثّل منحنى الاقتران:
 حيث: $f(x) = x \sin x$ ، $x \geq 0$ ، فأجيب عن
 السؤالين الآتيين تبعًا:

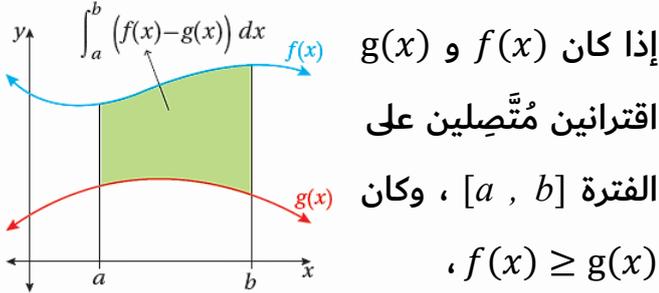


14) أجد إحداثيي كلٍّ من النقطة A ، والنقطة B .

15) أجد مساحة المنطقة المُظَلَّلة.

الدرس الخامس: المساحات والحجوم

مفهوم أساسي مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ائترانين



$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

أتعلم

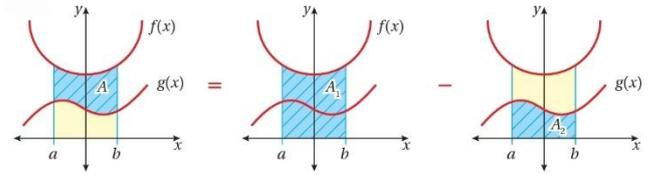
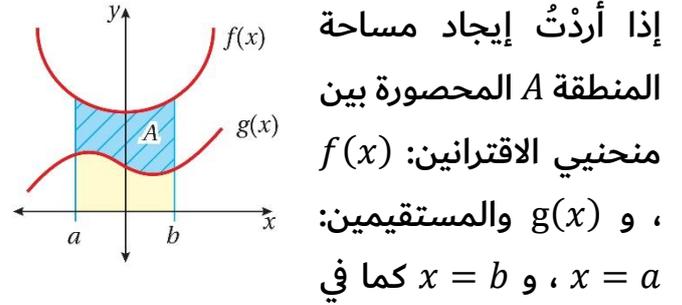
يُمكن إيجاد المساحة المحصورة بين منحنى ائترانين في فترة ما من دون تحديد العلوي والسفلي منهما في تلك الفترة باستعمال الصيغة الآتية:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

عند إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ائترانين ، والمستقيمين: $x = a$ ، و $x = b$ ، يجب تحديد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى ائترانين في الفترة $[a, b]$ (إن وُجِدَت)؛ لأنَّ وجود نقاط تقاطع بين منحنى ائترانين قد يتطلَّب تجزئة التكامل.

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ائترانين:

تعلَّمتُ سابقًا إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ائتران والمُحور x . والآن سأتعلم إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنين.



بوجه عام، فإن:

$$A = \underbrace{\int_a^b f(x) dx}_{A_1} - \underbrace{\int_a^b g(x) dx}_{A_2}$$

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

مثال (1)



ألاحظ أنّ المنطقة التي يُراد إيجاد مساحتها بين المنحنيين في المثال السابق محدودة بمستقيمين معطيين، هما: $x = a$ ، و $x = b$. ولكن، إذا كانت هذه المنطقة محصورة فقط بين منحنيين متقاطعين من دون تحديد مُسبق للحدود، فإنّ حدود التكامل ستكون ضمن قيم x التي يتقاطع عندها المنحنيان.

مثال (2)



أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ ، و $g(x) = 4x - x^2$ ، في الربع الأوّل من المستوى الإحداثي.

أتعلم

ألاحظ أنّ حدود التكامل لم تُذكر في المسألة؛ لذا يجب إيجاد نقاط التقاطع؛ فهي تُمثّل حدود التكامل.

أتحقق من فهمي:



أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = x^2$ ، و $g(x) = x + 2$.

① أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = e^x$ ، و $g(x) = x$ ، والمستقيمين: $x = 0$ ، و $x = 2$.

② أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = \cos x$ ، و $g(x) = \sin x$ ، والمستقيمين: $x = 0$ ، و $x = \frac{\pi}{2}$.



أتحقق من فهمي:



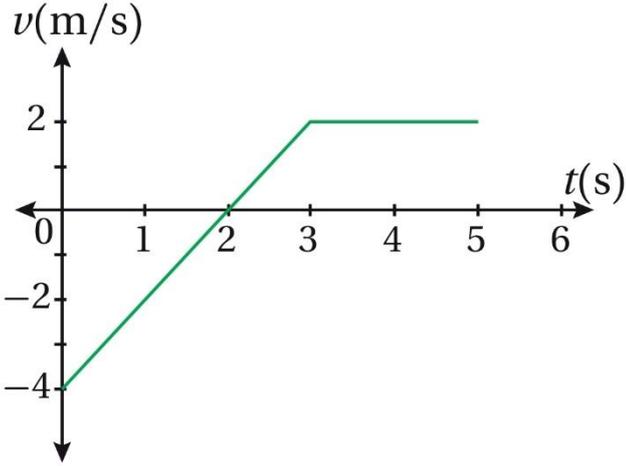
Ⓐ أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = \sqrt{x}$ ، و $g(x) = x^2 + 1$ ، والمستقيمين: $x = 0$ ، و $x = 3$.

Ⓑ أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = \sin x$ ، و $g(x) = 2 - \sin x$ ، والمستقيمين: $x = 0$ ، و $x = \pi$.



مثال (3) 

يُبيّن الشكل المجاور منحنى السرعة - الزمن لجسيم يتحرّك على المحور x في الفترة الزمنية $[0, 5]$. إذا بدأ الجسيم الحركة من $x = 2$ عندما $t = 0$ ، فأجد كلاً مما يأتي:



① إزاحة الجسيم في الفترة الزمنية المعطاة.

② المسافة التي قطعها الجسيم في الفترة الزمنية المعطاة.

③ الموقع النهائي للجسيم.



التكامل، ومنحنى السرعة - الزمن:

تعلّمت سابقاً أنّ الإزاحة هي التغيّر في موقع الجسم؛ فإذا كان $s(t)$ موقع جسم عند الزمن t ، فإنّ الإزاحة على الفترة الزمنية $[t_1, t_2]$ هي: $s(t_2) - s(t_1)$. تعلّمت أيضاً أنّه يُمكن استعمال التكامل المحدود لإيجاد إزاحة جسم علّمت سرعته كالآتي:

$$s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

أما المسافة الكلية التي يقطعها الجسم فيمكن إيجادها كما يأتي:

$$d = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)| dt$$

إذا علّم منحنى السرعة - الزمن لجسم يتحرّك في مسار مستقيم، فإنّ التكامل يُستعمل لإيجاد إزاحة هذا الجسم؛ ذلك أنّ الإزاحة تساوي تكامل اقتران السرعة؛ لذا يلزم الانتباه إلى أنّ المساحة الواقعة أسفل المحور x والمحصورة بين منحنى السرعة - الزمن والمحور x تُعبّر عن قيمة سالبة للتكامل، وأنّ المساحة الواقعة فوق المحور x والمحصورة بين منحنى السرعة - الزمن والمحور x تُعبّر عن قيمة موجبة للتكامل.

أما المسافة الكلية التي يقطعها الجسم فيمكن إيجادها بإيجاد المساحة المحصورة بين منحنى السرعة - الزمن والمحور x ؛ لأنها تكامل اقتران السرعة القياسية.

أتذكر

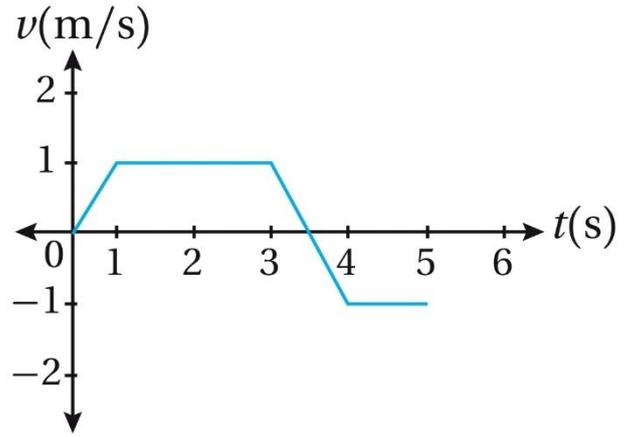
قد تكون قيمة الإزاحة موجبة، أو سالبة، أو صفراً، تبعاً لاتجاه حركة الجسم. أمّا المسافة فهي طول المسار الذي يقطعه الجسم بصرف النظر عن الاتجاه.

لا تحل نفسك أكثر من يومك، كذا خطوة خطوة.



أتحقق من فهمي:

يُبيّن الشكل المجاور منحنى السرعة - الزمن لجسّيم يتحرّك على المحور x في الفترة الزمنية $[0, 5]$. إذا بدأ الجسّيم الحركة من $x = 3$ عندما $t = 0$ ، فأجد كلاً مما يأتي:



(a) إزاحة الجسّيم في الفترة الزمنية المعطاة.

(b) المسافة التي قطعها الجسّيم في الفترة الزمنية المعطاة.

(c) الموقع النهائي للجسّيم.

بصحة

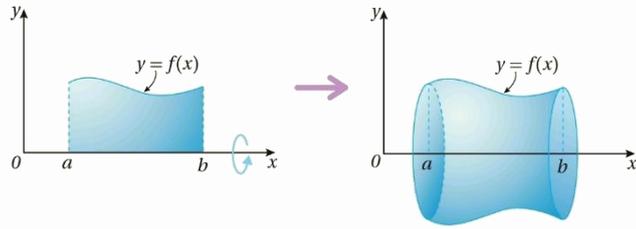
الحجوم الدورانية:

تعلّمت سابقاً أنّ الشكل الناتج من دوران منطقة ما دورة كاملة حول المحور x يُسمّى المُجسّم الدوراني، وأنّه يُمكن إيجاد حجم هذا المُجسّم عن طريق التكامل.

ملخص المفهوم: حجوم المجسمات الدورانية

حجم المُجسّم الناتج من دوران المنطقة التي تنحصر بين منحنى $y = f(x)$ والمحور x ، وتقع بين $x = a$ و $x = b$ ، حيث: $a < b$ حول المحور x ، هو:

$$V = \int_a^b \pi y^2 dx \quad \text{or} \quad V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx$$

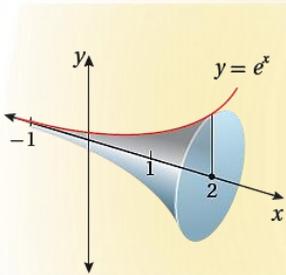


مثال (4)



أجد حجم المُجسّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = e^x$ والمحور x ، من $x = -1$ إلى $x = 2$ حول المحور x .

الدعم البياني



يُبيّن الشكل المجاور المُجسّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = e^x$ والمحور x ، والمستقيمين: $x = -1$ و $x = 2$ حول المحور x .

كل مرة تكمل رغم رغبتك في التوقف، أنت تبني قوة حقيقية.



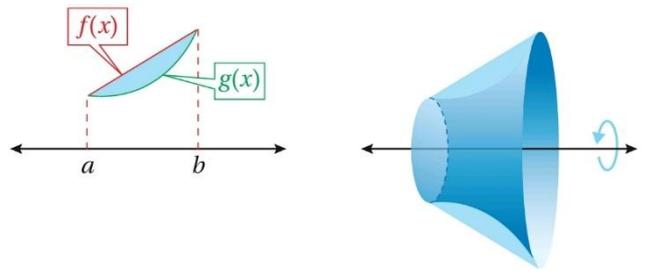


أتتحقق من فهمي:

أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{1}{x}$ والمحور x ، والمستقيمين: $x = 1$ و $x = 4$ حول المحور x .



تعلّمتُ في المثال السابق إيجاد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران، والمحور x والمستقيمين: $x = a$ و $x = b$ حول المحور x . والآن سأتعلم كيف أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران منطقة محصورة بين منحنىي اقترانين، والمستقيمين: $x = a$ و $x = b$ حول المحور x عن طريق طرح حجم المُجسَّم الدوراني الداخلي من حجم المُجسَّم الدوراني الخارجي كما في الشكل الآتي:



أتعلم

ألاحظ أنّ المُجسَّم الناتج من الدوران مُفرَّغ من الداخل.

حجم المُجسَّم الدوراني الناتج من دوران منحنىي اقترانين

مفهوم أساسي

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين مُتّصلين على الفترة $[a, b]$ ، وكان منحنى $f(x)$ أبعد من منحنى $g(x)$ عن المحور x ، وكان كلا المنحنيين في الجهة نفسها من المحور x ، فإنّ حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة التي تنحصر بين منحنىي الاقترانين: $f(x)$ و $g(x)$ ، وتقع بين $x = a$ و $x = b$ ، حيث: $a < b$ حول المحور x ، هو:

$$V = \int_a^b \pi \left((f(x))^2 - (g(x))^2 \right) dx$$

أتعلم

يُشترط لتطبيق معادلة المُجسَّم الدوراني الناتج من دوران منطقة محصورة بين منحنىي اقترانين أن يكون كلا المنحنيين في الجهة نفسها بالنسبة إلى المحور x .

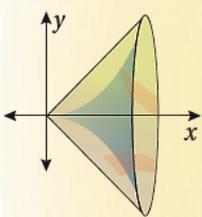
أما إذا كان أحد الاقترانين فوق المحور x والآخر أسفله، فإنّه يلزم لإيجاد الحجم الناتج توافر تفاصيل أخرى لن نُذكر في هذا الكتاب.

مثال (5)



أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنىي الاقترانين: $f(x) = x$ ، و $g(x) = x^3$ في الربع الأوّل من المستوى الإحداثي حول المحور x .

الدعم



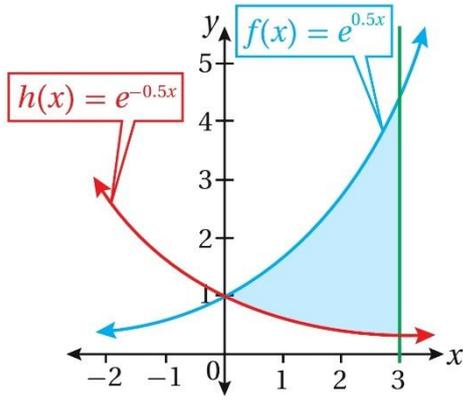
يبيّن الشكل المجاور المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنىي الاقترانين: $f(x) = x$ ، و $g(x) = x^3$ في الربع الأوّل من المستوى الإحداثي حول المحور x .



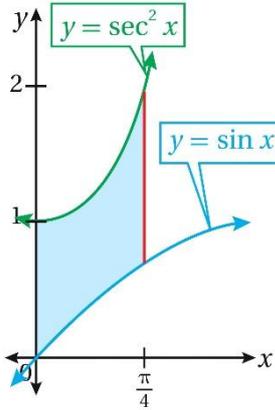
لا تجعل القلق يشلك، اجعله يدفعك للتحرك.



③



④



⑤ أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنىي
الاقترانين: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 6$ و $g(x) = 2x^2$.

⑥ أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنىي
الاقترانين: $f(x) = 4^x$ و $g(x) = 3^x$ ،
والمستقيم $x = 1$ في الربع الأوّل.

⑦ أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنىي
الاقترانين: $f(x) = e^x$ و $g(x) = \cos x$ ،
والمستقيم $x = \frac{\pi}{2}$ في الربع الأوّل.

أتحقق من فهمي:



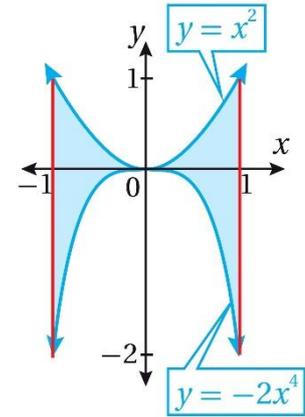
أجد حجم المُجَسَّم الناتج من دوران المنطقة
المحصورة بين منحنىي الاقترانين: $f(x) = \sqrt{x}$
و $g(x) = x^2$ حول المحور x .

أدرب وأحل المسائل:

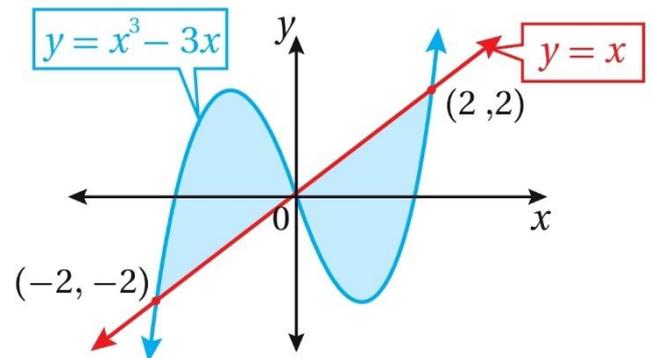


أجد مساحة المنطقة المظلمة في كل
من التمثيلات البيانية الآتية:

①



②

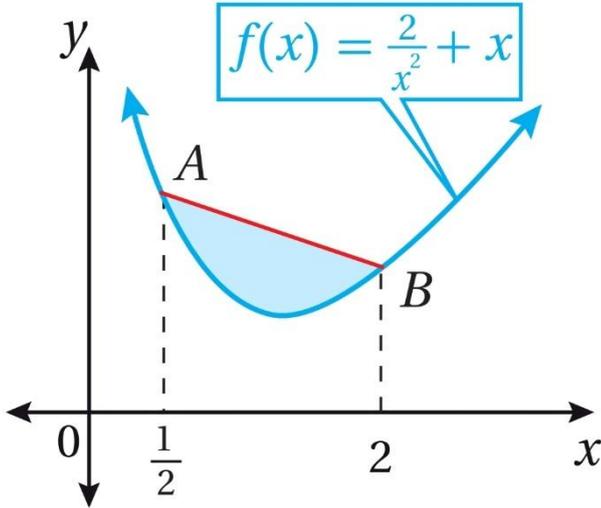


النتائج الكبيرة لا تأتي من اندفاع مؤقت، بل من التزام طويل.



12 يُبيّن الشكل المجاور منحنى الاقتران:

النقطة A والنقطة B هو $\frac{1}{2}$ و 2 على الترتيب، فأجد مساحة المنطقة المحصورة بين المستقيم AB ومنحنى الاقتران $f(x)$.



8 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنىي

الاقترانين: $f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$ ، و $g(x) = -x^2 + 2x$.

9 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنىي

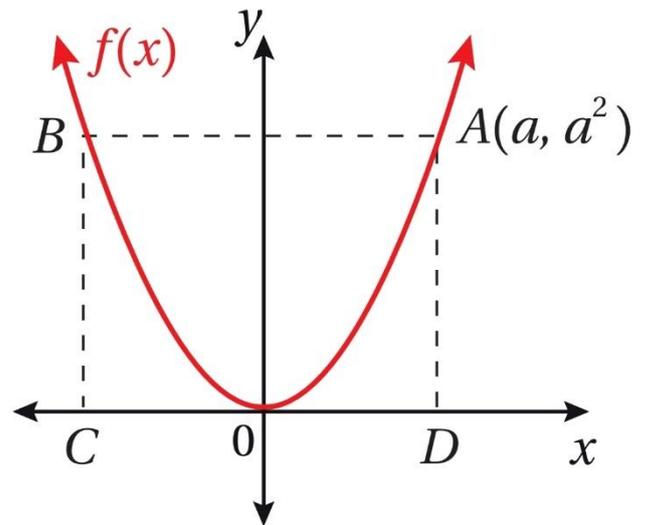
الاقترانين: $f(x) = 4 - x^2$ و $g(x) = 4x + 12$ ، والمستقيمين: $x = 2$ ، و $x = -1$.

10 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنىي

الاقترانين: $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ و $h(x) = 4\sqrt{x}$.

11 يُبيّن الشكل التالي منحنى الاقتران:

هما $f(x) = x^2$. إذا كان إحداثيا النقطة A هما $A(a, a^2)$ ، فأثبت أنّ مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ والقطعة المستقيمة \overline{AB} تساوي ثلثي مساحة المستطيل $ABCD$.

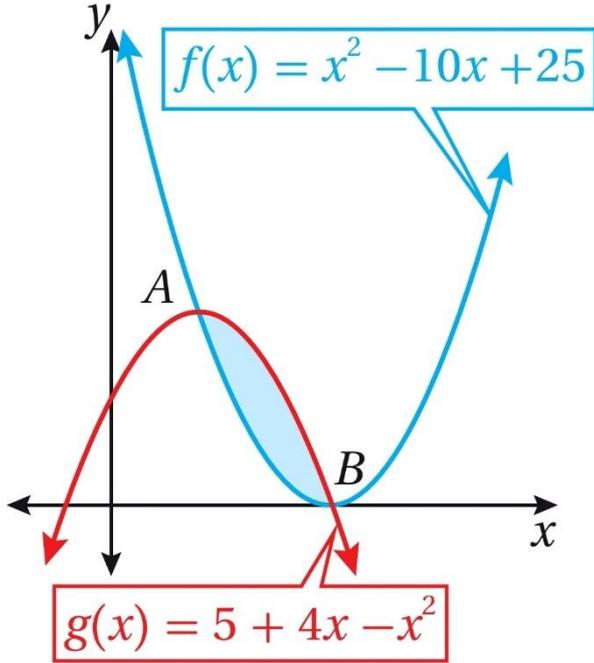


يُبيّن الشكل المجاور منحنىي الاقترانين:

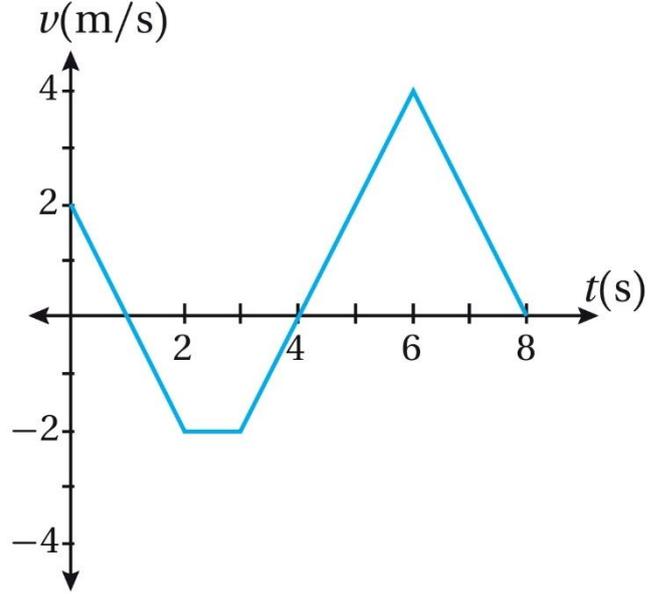
$$f(x) = x^2 - 10x + 25$$

$$g(x) = 5 + 4x - x^2$$

اعتمادًا على هذا الشكل، أُجيب عن السؤالين الآتيين تبعًا:



يُبيّن الشكل المجاور منحنى السرعة - الزمن لجَسِيم يتحرّك على المحور x في الفترة الزمنية $[0, 8]$. إذا بدأ الجَسِيم الحركة من $x = 5$ عندما $t = 0$ ، فأجد كلاً مما يأتي:



⑬ إزاحة الجَسِيم في الفترة الزمنية المعطاة.

⑭ المسافة التي قطعها الجَسِيم في الفترة الزمنية المعطاة.

⑮ الموقع النهائي للجَسِيم.

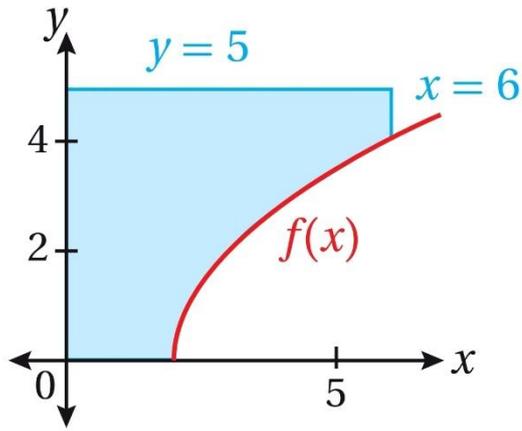
⑯ أجد إحداثيي كلٍّ من النقطة A ، والنقطة B .

⑰ أجد حجم المُجَسَم الناتج من دوران المنطقة المُظلّلة حول المحور x .

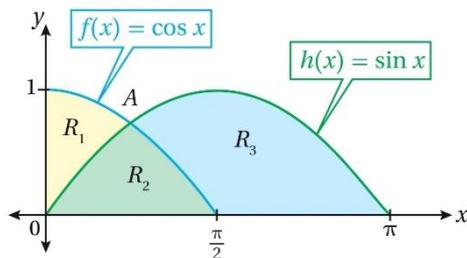
⑱ أجد حجم المُجَسَم الناتج من دوران المنطقة

المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = \sqrt{\sin x}$ في الفترة $[0, \pi]$ والمحور x حول المحور x .

23 **تبرير:** يُبيّن الشكل المجاور المنطقة المحصورة بين المحورين الإحداثيين في الربع الأوّل ، منحنى الاقتران: $f(x) = 2\sqrt{x-2}$ ، والمستقيمين: $x = 6$ ، و $y = 5$. أجد حجم المُجسّم الناتج من دوران المنطقة حول المحور x ، ثمّ أبدأ إجابتي.



24 **تبرير:** يُبيّن الشكل المجاور منحنى الاقترانين: $f(x) = \cos x$ ، و $h(x) = \sin x$ ، اعتمادًا على هذا الشكل، أجب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تبعًا:



24 أجد إحداثيي النقطة A .

25 أجد مساحة كل من المناطق: R_1 ، R_2 ، R_3 .

26 أثبت أنّ مساحة المنطقة R_1 إلى مساحة المنطقة R_2 تساوي $2 : \sqrt{2}$.

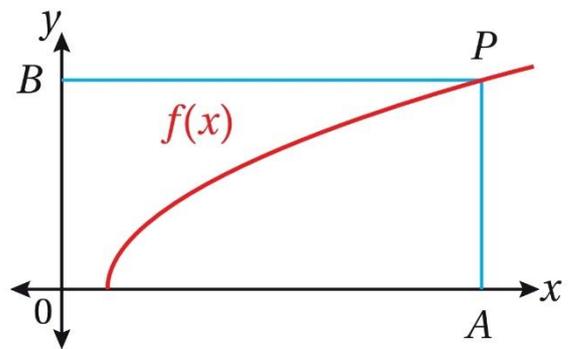
19 أجد حجم المُجسّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنىي الاقترانين: $f(x) = \sqrt{x}$ ، و $g(x) = x^3$ حول المحور x .

20 أجد حجم المُجسّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 1 + \sec x$ في الفترة $(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ والمستقيم $y = 3$ حول المحور x .

مهارات التفكير العليا:



27 **تبرير:** يُبيّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x) = \sqrt{2x-2}$ ، حيث: $x \geq 1$. إذا كانت النقطة $P(9, 4)$ تقع على منحنى الاقتران $f(x)$ ، حيث \overline{PA} يوازي المحور y ، و \overline{PB} يوازي المحور x ، فأجد كلاً مما يأتي:



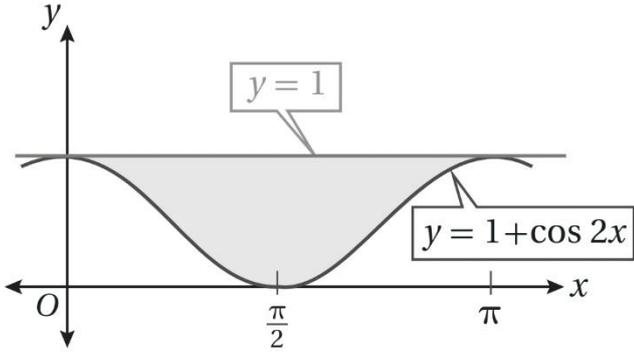
21 مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ ، والمستقيم $y = 4$ ، والمحورين الإحداثيين.

22 مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ ، والمستقيم $x = 9$ ، والمحور x .

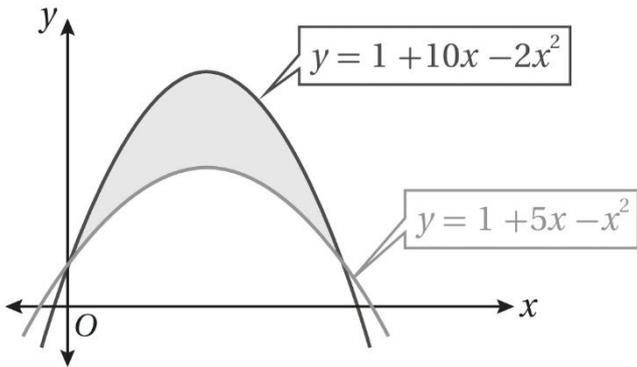
كتاب التمارين

أجد مساحة المنطقة المظلة في كل من التمثيلات البيانية الآتية:

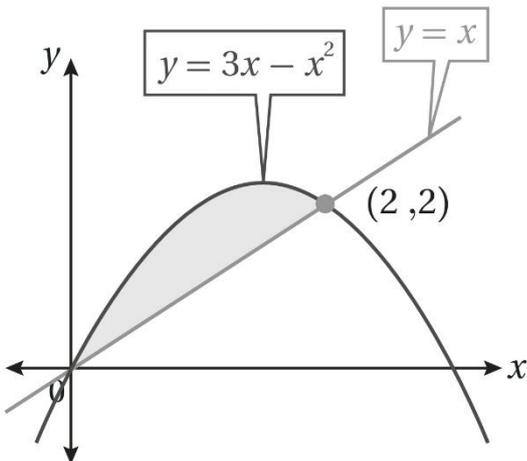
①



②



③

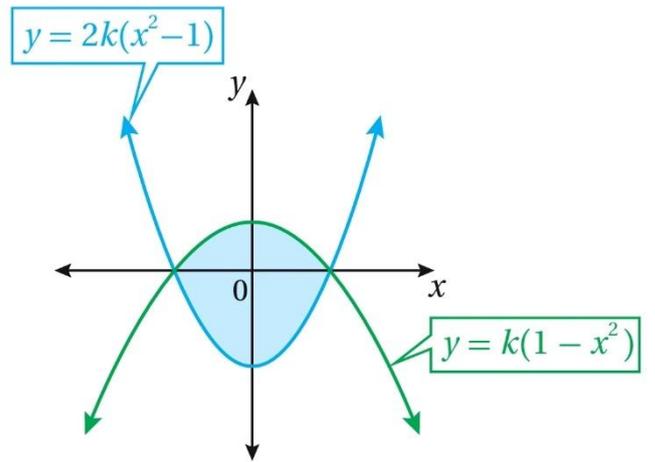


تحديد: إذا كان العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $f(x) = x^2 - 4x + 6$ عند النقطة $(1, 3)$ يقطع منحنى الاقتران مرّة أخرى عند النقطة P ، فأجد كلاً ممّا يأتي:

②7 إحدائيات النقطة P .

②8 مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ ، والعمودي على المماس، ثمّ أقرب إجابتي إلى أقرب 3 منازل عشرية.

②9 **تبرير:** المنطقة المظلمة في الشكل المجاور محصورة بين قطعين مكافئين، يقطع كلٌّ منهما المحور x عندما $x = -1$ ، و $x = 1$. إذا كانت معادلتا القطعين هما: $y = 2k(x^2 - 1)$ ، و $f(x) = k(1 - x^2)$ وكانت مساحة المنطقة المظلمة هي 8 وحدات مربعة، فأجد قيمة الثابت k .

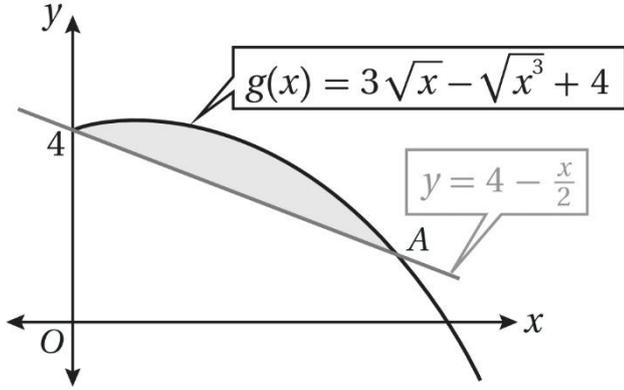


يُبيّن الشكل المجاور منحنى الاقتران:

$$g(x) = 3\sqrt{x} - \sqrt{x^3} + 4$$

والمستقيم $y = 4 - \frac{x}{2}$. اعتمادًا على هذا الشكل، أُجيب عن

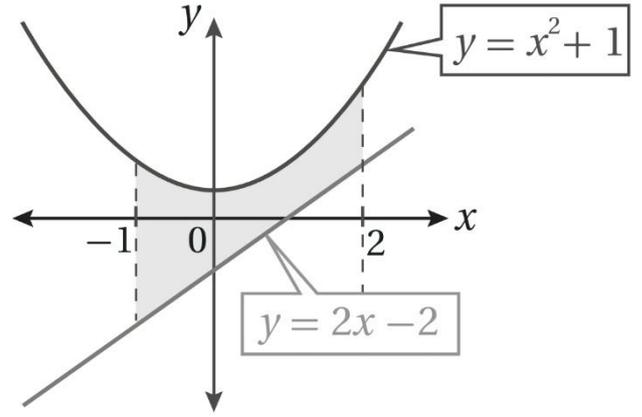
السؤالين الآتيين تبعًا:



⑧ أجد إحداثيي النقطة A.

⑨ أجد مساحة المنطقة المظللة.

④



⑤ أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنىي

الاقترانين: $f(x) = x^2$ و $g(x) = 2 - x$.

⑥ أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنىي

الاقترانين: $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2}$

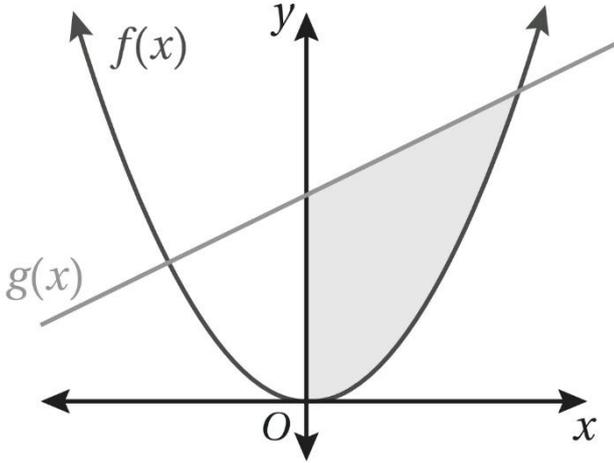
والمستقيم $x = 2$.

⑦ أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنىي

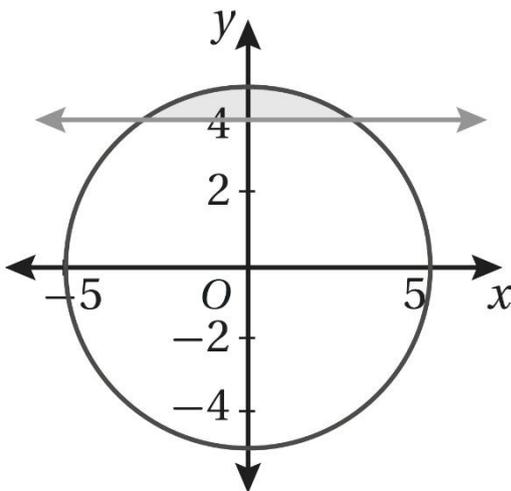
الاقترانين: $f(x) = \cos x$ و $g(x) = 1 - \cos x$

والمستقيمين $x = 0$ و $x = \pi$.

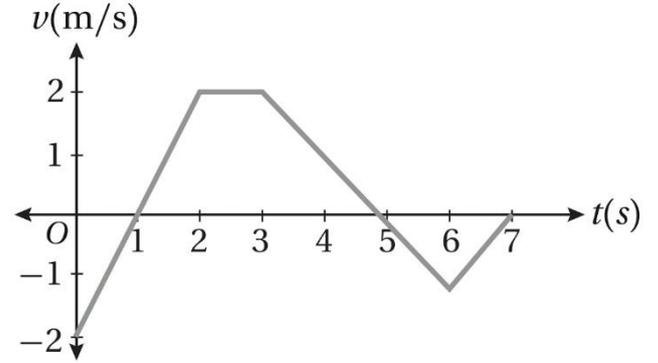
13 يُبيّن الشكل المجاور منحنىي الاقترانين:
 $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ ، و $g(x) = \frac{1}{2}x + 3$. أجد حجم
 المُجسّم الناتج من دوران المنطقة المُظلّلة حول
 المحور x .



16 **تبرير:** يُبيّن الشكل المجاور دائرة
 معادلتها: $x^2 + y^2 = 25$. إذا دار الجزء المُظلّل
 المحصور بين الدائرة والمستقيم $y = 4$ حول
 المحور x لتشكيل مُجسّم، فأجد حجم المُجسّم
 الناتج، ثمّ أبردّ إجابتي.



يُبيّن الشكل المجاور منحنى السرعة - الزمن
 لجَسِيم يتحرّك على المحور x في الفترة الزمنية
 $[0, 7]$. إذا بدأ الجَسِيم الحركة من $x = 2$ عندما
 $t = 0$ ، فأجد كلاً مما يأتي:



10 إزاحة الجَسِيم في الفترة الزمنية المعطاة.

11 المسافة التي قطعها الجَسِيم في الفترة الزمنية
 المعطاة.

12 الموقع النهائي للجَسِيم.

14 أجد حجم المُجسّم الناتج من دوران المنطقة
 المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = \sqrt{\ln x}$ ،
 والمحور x ، والمستقيمين $x = e$ ، و $x = e^3$.
 حول المحور x .

15 أجد حجم المُجسّم الناتج من دوران المنطقة
 المحصورة بين منحنىي الاقترانين: $f(x) = \sqrt{8x}$ ،
 و $g(x) = x^2$ حول المحور x .

الدرس السادس: المعادلات التفاضلية

المعادلات التفاضلية:

المعادلة التفاضلية (differential equation) هي معادلة جبرية تحوي مشتقة أو أكثر لاقتران ما، وقد تحوي الاقتران نفسه، ومن أمثلتها:

$$\frac{dy}{dx} = 2x^3 + 5$$

$$\frac{dp}{dt} = kP$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5 \frac{dy}{dx} - 7y = \frac{1}{x}$$

أتعلم

المعادلة التي تكتب في صورة: $\frac{dy}{dx} = g(x)$ هي أبسط أنواع المعادلات التفاضلية؛ أي أنه يمكن التعبير عن مشتقة y صراحةً بدلالة المتغير x .

يُعد الاقتران: $y = f(x)$ حلاً للمعادلة التفاضلية إذا تحققت المعادلة عند تعويض $f(x)$ ومشتقاته فيها.



مثال (1) أوجد إذا كان الاقتران المعطى

حلاً للمعادلة التفاضلية: $y' + y = 0$ في كل مما يأتي:

① $y = e^{-x}$

② $y = 2 \cos x$

أتحقق من فهمي:



أحدد إذا كان الاقتران المعطى حلاً للمعادلة التفاضلية: $y'' - 4y' + 3y = 0$ في كل مما يأتي:

Ⓐ $y = 4e^x + 5e^{3x}$

Ⓑ $y = \sin x$

الحل العام والحل الخاص للمعادلة التفاضلية:

يُمكن حلّ المعادلة التفاضلية عن طريق التكامل. فمثلاً، تُحلّ المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} = 5x$ على النحو الآتي:

المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = 5x$$

بمكاملة الطرفين بالنسبة إلى المتغير x

$$\int \frac{dy}{dx} dx = \int 5x dx$$

بالتبسيط

$$\int dy = \int 5x dx$$

بإيجاد التكامل

$$y = \frac{5}{2} x^2 + C$$

حين تفقد الحماس، تمسك بالنظام، فهو ما ينقذك.

طرف المعادلة الذي يحوي dy ، ثم إيجاد التكامل لكلّ من طرفي المعادلة.

تُعرَف الطريقة السابقة لحلّ المعادلات التفاضلية بطريقة **فصل المتغيرات** (separation of variables)، ويُطلَق على المعادلة التفاضلية التي يُمكن فصل متغيراتها اسم **المعادلة القابلة للفصل** (separable equation)، وهي معادلة تُكتب في الصورة الآتية:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) g(y)$$

أتعلم

المعادلة التفاضلية القابلة للفصل هي من أبسط المعادلات التفاضلية.

ألاحظ أنّ حل المعادلة التفاضلية: $y' = 5x$ يتضمّن ثابت التكامل C ؛ لذا يُسمى **الحلّ العام** (general solution) للمعادلة التفاضلية؛ ذلك أنّ قيمة الثابت C تعطي جميع حلول هذه المعادلة. أما **الحلّ الخاص** (particular solution) للمعادلة التفاضلية فيُقصد به الحلّ الذي يُحقّق شرطًا أوّليًا معلومًا يُمكن عن طريقه تحديد قيمة الثابت C .

مثال (2) أجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\frac{dy}{dx} = e^x - 6x^2$$

ثمّ أجد الحلّ الخاص لها الذي يحقق النقطة $(1, 0)$:

مثال (3) أحل كلا من المعادلات التفاضلية الآتية:

$$\textcircled{1} \frac{dy}{dx} = -x y^2$$

أتعلم

إذا لم يُحدّد في السؤال شرط أوّلي للمعادلة التفاضلية، فهذا يعني أنّ الحلّ المطلوب هو الحلّ العام.

$$\textcircled{2} \frac{dy}{dx} = x + xy$$

$$\textcircled{3} \frac{dy}{dx} = \frac{8x^3}{4y - \sin y}$$

$$\textcircled{4} (1 + x^3) \frac{dy}{dx} = x^2 \tan y$$

أتتحقق من فهمي:

أجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\frac{dy}{dx} = 5 \sec^2 x - \frac{3}{2} \sqrt{x}$$

ثمّ أجد الحلّ الخاص لها الذي يحقق النقطة $(0, 7)$.

حل المعادلات التفاضلية بفصل المتغيرات:

تعلّمتُ في المثال السابق حلّ معادلات تفاضلية في صورة: $\frac{dy}{dx} = g(x)$ عن طريق إيجاد التكامل لطرفي المعادلة مباشرة، ولكنّ ذلك لا ينطبق على جميع المعادلات التفاضلية؛ فبعضها يحتوي على المتغيّرين x و y معًا في أحد طرفي المعادلة. وفي هذه الحالة، فإنّ الحلّ يتطلّب أوّلاً فصل dx عن dy ، وذلك بكتابة dx في أحد طرفي المعادلة، وكتابة dy في الطرف الآخر، ثمّ نقل جميع الحدود التي تحوي المتغيّر x إلى طرف المعادلة الذي يحوي dx ، ونقل جميع الحدود التي تحوي المتغيّر y إلى

أتحقق من فهمي:



أجد الحل الخاص الذي يحقق الشرط الأولي المعطى لكل معادلة تفاضلية مما يأتي:

a) $\frac{dy}{dx} = xy^2 e^{2x}, y(0) = 1$

b) $\frac{dy}{dx} = y \cos x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

للمعادلات التفاضلية كثير من التطبيقات الحياتية؛ فهي تُستعمل لنمذجة الظواهر التي تحوي قيمًا مُتغيِّرةً، مثل: تكاثر المجتمعات الحيوية، وانتشار الأمراض، والسلوك الاقتصادي.



مثال (5) من الحياة:

أمراض: انتشر مرض الحصبة في إحدى المدارس بمعدّل يُمكن نمذجته بالمعادلة التفاضلية $\frac{ds}{dt} = \frac{s(1050-s)}{5000}$ ، حيث s عدد الطلبة المصابين بعد t يومًا من اكتشاف المرض،



① أحلّ المعادلة التفاضلية لإيجاد عدد الطلبة المصابين بعد t يومًا، علمًا بأنّ عدد الطلبة المصابين عند اكتشاف المرض هو 50 طالبًا.

② بعد كم يومًا يصبح عدد الطلبة المصابين 350 طالبًا؟

أتحقق من فهمي:



أحل كلا من المعادلات التفاضلية الآتية:

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y^4}$

b) $\frac{dy}{dx} = 2x - x e^y$

c) $\frac{dy}{dx} = \frac{x \sin x}{y}$

d) $\sin^2 x \frac{dy}{dx} = y^2 \cos^2 x$

تعلّمتُ في المثال السابق إيجاد الحلّ العام لمعادلات قابلة للفصل. والآن سأتعلم إيجاد الحلّ الخاص لهذا النوع من المعادلات.



مثال (4) أجد الحل الخاص الذي يحقق الشرط الأولي المعطى لكل معادلة تفاضلية مما يأتي:

① $\frac{dy}{dx} = \sin x \sec y, y(0) = 0$

② $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}, y(0) = 2$

أتحقق من فهمي:



يتحرك جسيم في مسار مستقيم ، وتعطى سرعته بالمعادلة التفاضلية: $\frac{ds}{dt} = st \sqrt{t+1}$ ، حيث t الزمن بالثواني ، و s موقع الجسيم بالأمتار . أجد موقع الجسيم بعد 3 ثوانٍ من بدء الحركة ، علمًا بأن $s(0) = 1$.



أدرب وأحل المسائل:



أحدد إذا كان الاقتران المعطى حلاً للمعادلة التفاضلية في كل مما يأتي:

① $y = \sqrt{x}$; $xy' - y = 0$

② $y = x \ln x - 5x + 7$; $y'' - \frac{1}{x} = 0$

③ $y = \tan x$; $y' + y^2 = 1$

④ $y = e^x + 3xe^x$; $y'' - 2y' + y = 0$



أتحقق من فهمي:



غزلان: يُمكن نمذجة مُعدّل تغيّر عدد الغزلان في إحدى الغابات بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dP}{dt} = \frac{1}{20000} P (1000 - P)$ ، حيث P عدد الغزلان في الغابة بعد t سنة من بدء دراسة عليها:



Ⓐ أحلّ المعادلة التفاضلية لإيجاد عدد الغزلان في الغابة بعد t سنة من بدء الدراسة عليها ، علمًا بأن عددها عند بدء الدراسة هو 2500 غزال.

Ⓑ بعد كم سنةً يصبح عدد الغزلان في الغابة 1800 غزال؟



المعادلات التفاضلية، والحركة في مسار مستقيم:

تعلمت سابقًا كيف أجد موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم إذا علم اقتران السرعة لهذا الجسم. ولكن، في بعض الحالات، تعطى السرعة للجسم بمعادلة تفاضلية، فيلزم عندئذٍ حلّ المعادلة التفاضلية لإيجاد موقع الجسم في لحظة مُعيّنة.

مثال (6) يتحرك جسيم في مسار مستقيم،

وتعطى سرعته بالمعادلة التفاضلية: $\frac{ds}{dt} = -s^2 \ln(t+1)$ ، حيث t الزمن بالثواني ، و s موقع الجسيم بالأمتار ، أجد موقع الجسيم بعد 3 ثوانٍ من بدء الحركة ، علمًا بأن $s(0) = 0.5$.

$$(15) \quad y \frac{dy}{dx} = \sin^3 x \cos^2 x$$

$$(16) \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{xy}$$

$$(17) \quad \frac{dy}{dx} = y \ln \sqrt{x}$$

$$(18) \quad (2x + 1)(x + 2) \frac{dy}{dx} = -3(y - 2)$$

أجد الحل الخاص الذي يحقق الشرط الأولي المعطى لكل من المعادلات التفاضلية الآتية:

$$(19) \quad \frac{dy}{dx} = y^2 \sqrt{4 - x} ; y(1) = 2$$

$$(20) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2 \sin^2 x}{y} ; y(0) = 1$$

$$(21) \quad \frac{dy}{dx} = 2 \cos^2 x \cos^2 y ; y(0) = \frac{\pi}{4}$$

$$(22) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x e^{\sin x}}{e^y} ; y(\pi) = 0$$

$$(23) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{8x - 18}{(3x - 8)(x - 2)} ; y(3) = 8$$

$$(24) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy} ; y(e) = q$$

أحل كلا من المعادلات التفاضلية الآتية:

$$(5) \quad \frac{dy}{dx} = 3x \sqrt{y}$$

$$(6) \quad \frac{dy}{dx} + \frac{3x}{y^2} = 0$$

$$(7) \quad \frac{dy}{dx} = \cos x \sin y$$

$$(8) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$(9) \quad \frac{dy}{dx} = x e^{x+y}$$

$$(10) \quad e^{-1/x} \frac{dy}{dx} = x^{-2} y^2$$

$$(11) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x - 3}$$

$$(12) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 \sin^2 y}{x^3 + 2}$$

$$(13) \quad \frac{dy}{dx} = y^3 \ln x$$

$$(14) \quad \frac{dy}{dx} = 2x^3 (y^2 - 1)$$

الثبات في الأيام العادية هو ما يصنع النتائج غير العادية.

🐛 **حشرات:** يتغيّر عدد الحشرات في مجتمع للحشرات بمعدّل يُمكن نمذجته بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dn}{dt} = 0.2n(0.2 - \cos t)$ حيث n عدد الحشرات و t الزمن بالأسابيع بعد بدء ملاحظة الحشرات:

29) أحلّ المعادلة التفاضلية لإيجاد عدد الحشرات في هذا المجتمع بعد t أسبوعًا، علمًا بأنّ عددها الابتدائي هو 400 حشرة.

30) أجد عدد الحشرات في هذا المجتمع بعد 3 أسابيع.

31) تُمثّل المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} = y \cos x$ ميل المماس لمنحنى علاقة ما. أجد قاعدة هذه العلاقة إذا علمت أنّ منحنها يمرُّ بالنقطة $(0, 1)$.

32) تُمثّل المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} = y(x + 1)$ ميل المماس لمنحنى علاقة ما. أجد قاعدة هذه العلاقة إذا علمت أنّ منحنها يمرُّ بالنقطة $(1, 3)$.

25) تتحرّك سيّارة في مسار مستقيم، ويعطى تسارعها بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dv}{dt} = 10 - 0.5v$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعتها بالمتر لكل ثانية. أجد سرعة السيّارة بعد t ثانية من بدء حركتها، علمًا بأنّ السيّارة تحرّكت من وضع السكون.



26) ذئب: يُمكن نمذجة مُعدّل تغيّر عدد الذئاب في إحدى الغابات بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dN}{dt} = 260 - 0.4N$

حيث N عدد الذئاب في الغابة بعد t سنة من بدء دراسة عليها. أجد عدد الذئاب في الغابة بعد 3 سنوات من بدء الدراسة، علمًا بأنّ عددها عند بدء الدراسة هو 300 ذئب، وأنّ $300 \leq N < 650$.

🌐 **كرة:** تنكمش كرة، ويتغيّر نصف قُطرها بمعدّل يُمكن نمذجته بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dr}{dt} = 0.0075r^2$ ، حيث r طول نصف قُطر الكرة بالسنتيمتر، و t الزمن بالثواني بعد بدء انكماش الكرة:

27) أحلّ المعادلة التفاضلية لإيجاد طول نصف قُطر الكرة بعد t ثانية، علمًا بأنّ طول نصف طول نصف الكرة الابتدائي هو 20 cm .

28) بعد كم ثانية يصبح طول نصف قُطر الكرة 10 cm ؟

💡 **تبرير:** تُمثّل المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{3y}$

ميل المماس لمنحنى علاقة ما:

38) أجد قيمة n التي تجعل العلاقة: $x^2 + ny^2 = a$ حلاً للمعادلة التفاضلية المعطاة، حيث a ثابت اختياري، ثم أبرّر إجابتي.

39) أجد إحداثيي نقاط تقاطع منحنى العلاقة مع المحور x إذا علمت أنّ منحنىها يمرُّ بالنقطة $(4, 5)$ ، ثمّ أبرّر إجابتي.

كتاب التمارين

أحل كلا من المعادلات التفاضلية الآتية:

1) $\frac{dy}{dx} = 3x^2 y$

2) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 4}{x}$

3) $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$

4) $\frac{dy}{dx} = \frac{x \sec y}{y e^{x^2}}$

5) $\frac{dy}{dx} = \frac{y - 3}{y}$

مهارات التفكير العليا:



🧠 **تحذير:** أحل كلا من المعادلات التفاضلية الآتية:

33) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^2} - xy - \frac{1}{y^2} + y$

34) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2y - 1} - \frac{2x}{3y - 2}$

35) $\frac{dy}{dx} = 1 + \tan^2 x + \tan^2 y + \tan^2 x \tan^2 y$

💡 **تبرير:** يُمكن نمذجة مُعدّل تحلّل مادة

مُشعّة بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dx}{dt} = -\lambda x$ ، حيث x الكتلة المُتبقّية من المادة المُشعّة بالمليغرام بعد t يومًا، و $\lambda > 0$:

36) أثبت أنّه يُمكن كتابة الحلّ العام للمعادلة التفاضلية في صورة: $x = ae^{-\lambda t}$ ، حيث a ثابت، ثمّ أبرّر إجابتي.

37) إذا كان عمر النصف للمادة المُشعّة هو الوقت اللازم لتحلّل نصف هذه المادة، و a كتلة المادة الابتدائية، فأثبت أنّ عمر النصف للمادة المُشعّة هو $\frac{\ln 2}{\lambda}$ ، ثمّ أبرّر إجابتي.

١٣ بكتيريا: يتغيّر عدد الخلايا البكتيرية في مجتمع بكتيري بمعدّل يُمكن نمذجته بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2} y^{0.8}$ حيث y عدد الخلايا و t الزمن بالأيام:

١٣ أحلّ المعادلة التفاضلية لإيجاد عدد الخلايا البكتيرية في هذا المجتمع بعد t يومًا، علمًا بأنّ عددها الابتدائي هو 100000 خلية.

١٤ أجد عدد الخلايا البكتيرية في هذا المجتمع بعد أسبوع.

١٥ تتحرّك سيّارة في مسار مستقيم، ويعطى تسارعها بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dv}{dt} = -\frac{v^2}{100}$ ، $t \geq 0$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعتها بالمتّر لكل ثانية. أجد سرعة السيّارة بعد t ثانية من بدّء حركتها، علمًا بأنّ سرعتها الابتدائية هي 20 m/s .

١٦ تُمثّل المعادلة التفاضلية:

$e^y \frac{dy}{dx} = 10 + 2 \sec^2 x$ ميل المماس لمنحنى علاقة ما. أجد قاعدة هذه العلاقة إذا علمت أنّ منحنها يمرُّ بالنقطة $(\frac{\pi}{4}, 0)$.

١٧ تُمثّل المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0$ ميل

المماس لمنحنى علاقة ما. أجد قاعدة هذه العلاقة إذا علمت أنّ منحنها يمرُّ بالنقطة $(6, 4)$.

$$\textcircled{6} \frac{dy}{dx} = \frac{x \ln x}{y^2}$$

أجد الحل الخاص الذي يحقق الشرط الأولي المعطى لكل معادلة تفاضلية ممّا يأتي:

$$\textcircled{7} \frac{dy}{dx} = -30 \cos 4x \sin 4x ; y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\textcircled{8} \frac{dy}{dx} = x^2 \sqrt{y} ; y(0) = 2$$

$$\textcircled{9} \frac{dy}{dx} = \frac{4\sqrt{x}}{\cos y} ; y(0) = 0$$

$$\textcircled{10} \frac{dy}{dx} = x e^{y-x^2} ; y(1) = 0$$

$$\textcircled{11} \frac{dy}{dx} = x e^{-y} ; y(4) = \ln 2$$

$$\textcircled{12} \frac{dy}{dx} = (3x^2 + 4) y^2 ; y(2) = -0.1$$

اختبار نهاية الوحدة



أجد كلا من التكاملات الآتية:

$$4 \int \frac{1}{\sqrt{e^x}} dx$$

$$5 \int \left(\tan 2x + e^{3x} - \frac{1}{x} \right) dx$$

$$6 \int \csc^2 x (1 + \tan^2 x) dx$$

$$7 \int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 5} dx$$

$$8 \int \frac{2x^2 + 7x - 3}{x - 2} dx$$

$$9 \int \sec^2(2x - 1) dx$$

$$10 \int \cot(5x + 1) dx$$

$$11 \int_0^{\pi/2} \sin x \cos x dx$$

$$12 \int_0^{\pi} \cos^2 0.5 x dx$$

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1 قيمة $\int_0^2 e^{2x} dx$ هي:

(a) $e^4 - 1$

(b) $e^4 - 2$

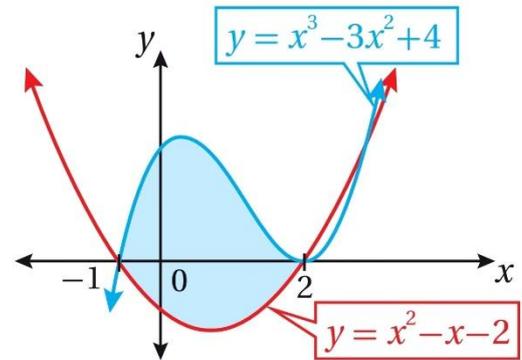
(c) $2e^4 - 2$

(d) $\frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}$

2 يُبين الشكل الآتي المنطقة المحصورة بين

منحنيي الاقتارنين: $y = x^3 - 3x^2 + 4$ ، و

$y = x^2 - x - 2$ في الفترة $[-1, 2]$.



التكامل المحدود الذي يُمكن عن طريقه إيجاد مساحة المنطقة المُظَلَّلة هو:

(a) $\int_{-1}^2 (x^3 - 4x^2 + x + 6) dx$

(b) $\int_{-1}^2 (-x^3 + 4x^2 - x - 6) dx$

(c) $\int_{-1}^2 (x^3 - 4x^2 - x + 2) dx$

(d) $\int_{-1}^2 (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx$

3 حلُّ المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} = 2xy$ الذي تُحقِّقه

النقطة $(0, 1)$ هو:

(a) $y = e^{x^2}$

(b) $y = x^2 y$

(c) $y = x^2 y + 1$

(d) $y = \frac{x^2 y^2}{2x + 1}$

$$23 \int \sec^2 x \tan x \sqrt{1 + \tan x} \, dx$$

$$24 \int \frac{x}{\sqrt[3]{4-3x}} \, dx$$

$$25 \int \frac{(\ln x)^6}{x} \, dx$$

$$26 \int (x+1)^2 \sqrt{x-2} \, dx$$

$$27 \int x \csc^2 x \, dx$$

$$28 \int (x^2 - 5x) e^x \, dx$$

$$29 \int x \sin 2x \, dx$$

أجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$30 \int_0^1 t 3^{t^2} \, dt$$

$$31 \int_{\pi/4}^{\pi/3} \cot^3 x \, dx$$

$$32 \int_{-\pi/2}^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{4+3 \sin x}} \, dx$$

$$13 \int_0^{\pi/4} (\sec^2 x + \cos 4x) \, dx$$

$$14 \int_0^{\pi/3} \left(\sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) - 1 + \cos 2x \right) \, dx$$

$$15 \int_0^{\pi/8} \sin 2x \cos 2x \, dx$$

$$16 \int \frac{4}{x^2 - 4} \, dx$$

$$17 \int \frac{x+7}{x^2 - x - 6} \, dx$$

$$18 \int \frac{x-1}{x^2 - 2x - 8} \, dx$$

$$19 \int \frac{x^2 + 3}{x^3 + x} \, dx$$

$$20 \int \frac{1}{x^2(1-x)} \, dx$$

$$21 \int \frac{\sin x}{\cos^2 x - 3 \cos x} \, dx$$

$$22 \int \frac{\sqrt{x}}{x-4} \, dx$$

39 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنىي
الاقتراينين: $f(x) = \sqrt{x}$ ، و $g(x) = x^2$.

40 أجد المساحة المحصورة بين منحنىي الاقتراينين:
 $f(x) = x^3$ ، و $g(x) = x$.

41 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنىي
الاقتراينين: $f(x) = -x$ ، و $g(x) = x^2 + 2$ ،
والمستقيمين: $x = -2$ ، و $x = 2$.

42 أثبت أن: $\int_2^5 \frac{x^2}{x^2-1} dx = 3 + \frac{1}{2} \ln 2$.

يتحرك جسيم في مسار مستقيم ، وتعطى سرعته
بالاقتران: $v(t) = t^2 - 4t$ ، حيث t الزمن
بالثواني ، و v سرعته بالمتر لكل ثانية:

43 أجد إزاحة الجسيم في الفترة $[1, 10]$.

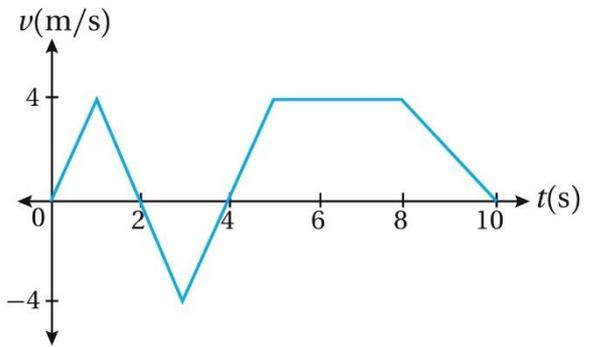
44 أجد المسافة الكلية التي قطعها الجسيم في
الفترة $[1, 10]$.

$$33 \int_{-1}^0 \frac{x^2 - x}{x^2 + x - 2} dx$$

$$34 \int_1^2 \frac{32x^2 + 4}{16x^2 - 1} dx$$

$$35 \int_{1/2}^{e/2} x \ln 2x dx$$

يُبيّن الشكل الآتي منحنى السرعة - الزمن لجسيم
يتحرك على المحور x في الفترة الزمنية $[0, 10]$.
إذا بدأ الجسيم الحركة من $x = 0$ عندما $t = 0$ ،
فأجب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعاً:



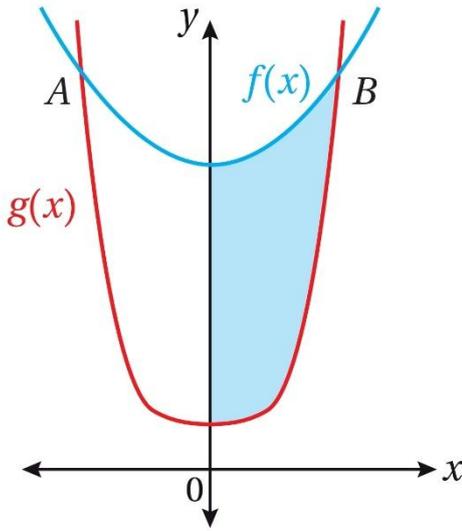
36 أجد إزاحة الجسيم في الفترة الزمنية المعطاة.

37 أجد المسافة التي قطعها الجسيم في الفترة
الزمنية المعطاة.

38 أجد الموقع النهائي للجسيم.

يُبيّن الشكل الآتي منحنىي الاقترانين:

$$: g(x) = x^4 + 2 \text{ ، و } f(x) = x^2 + 14$$



49 إذا كان منحنيا الاقترانين يتقاطعان في النقطة A والنقطة B ، فأجد إحداثيي نقطتي التقاطع.

50 أجد حجم المُجسّم الناتج من دوران المنطقة المُظلّلة حول المحور x .

51 أجد حجم المُجسّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = \sqrt{x} e^{-x}$ ، والمحور x ، والمستقيمين: $x = 1$ ، و $x = 2$ ، حول المحور x .

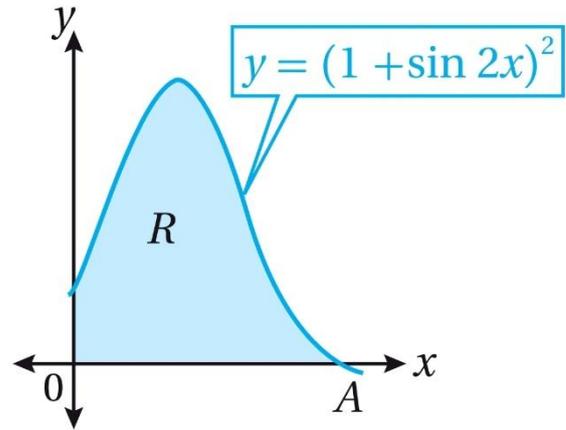
أحل كلا من المعادلات التفاضلية الآتية:

$$52 \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y}}{x}$$

$$53 \frac{dy}{dx} = x e^x \sec y$$

يُمثّل الشكل المجاور منحنى الاقتران:

$$: 0 \leq x \leq \frac{3\pi}{4} \text{ ، حيث: } y = (1 + \sin 2x)^2$$

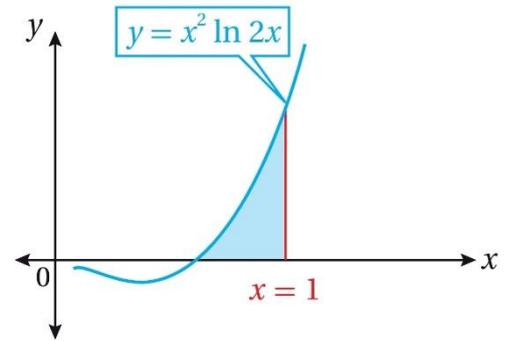


45 أجد إحداثيي النقطة A .

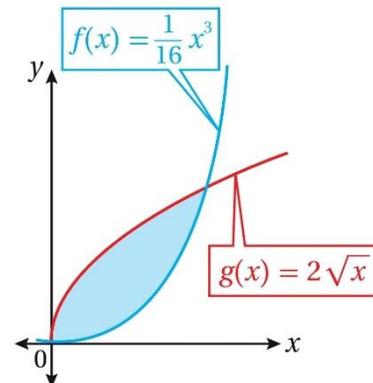
46 أجد مساحة المنطقة R .

أجد مساحة المنطقة المظللة في كل من التمثيلين البيانيين الآتين:

47



48



60 **تجارة:** يُمثّل الاقتران $P(x)$ سعر القطعة الواحدة (بالدينار) من مُنتَج مُعيّن ، حيث x عدد القطع المبيّعة من المُنتَج بالمئات. إذا كان: $P'(x) = \frac{-300x}{\sqrt{(9+x^2)^3}}$ هو مُعدّل التغيّر في سعر القطعة الواحدة من المُنتَج ، فأجد $P(x)$ ، علمًا بأنّ سعر بيع القطعة الواحدة هو JD 75 عندما يكون عدد القطع المبيّعة من المُنتَج 400 قطعة.

$$54 \quad 3y^2 \frac{dy}{dx} = 8x$$

$$55 \quad x \frac{dy}{dx} = 3x\sqrt{y} + 4\sqrt{y}$$

أجد الحل الخاص الذي يحقق الشرط الأولي المعطى لكل معادلة تفاضلية ممّا يأتي:

$$56 \quad \frac{dy}{dx} + 4y = 8 ; y(0) = 3$$

$$57 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{5e^y}{(2x+1)(x-2)} ; y(-3) = 0$$

58 **أسماك:** يتغيّر عدد الأسماك في إحدى البحيرات بمُعدّل يُمكن نمذجته بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dN}{dt} = 0.2N$ ، حيث N عدد الأسماك ، و t الزمن بالسنوات منذ هذه السنة:

58 **أحلّ** المعادلة التفاضلية لإيجاد عدد الأسماك في البحيرة بعد t سنة ، علمًا بأنّ عددها هذه السنة هو 300 سمكة.

59 **أجد** عدد الأسماك في البحيرة بعد 5 سنوات.



لا تبحث عن الراحة الآن، فالراحة الحقيقية تأتي عندما تنتهي وأنت راضٍ عن نفسك.