

الوحدة السادسة:

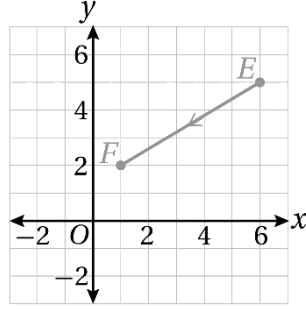
المتجهات - Vectors



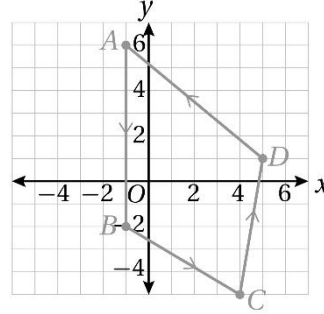
أستعد لدراسة الوحدة



اعتمادًا على الشكل المجاور، أكتب المتجه \overrightarrow{EF} بالصورة الإحداثية، ثم أجد مقداره



الصورة الإحداثية، ومقدار المتجه



اعتمادًا على الشكل المجاور، أكتب كلا من المتجهات الآتية بالصورة الإحداثية، ثم أجد مقدار كل منها:

① \overrightarrow{AB}

② \overrightarrow{BC}

③ \overrightarrow{CD}

④ \overrightarrow{DA}

جمع المتجهات وطرحها وضربها في عدد حقيقي هندسيًا

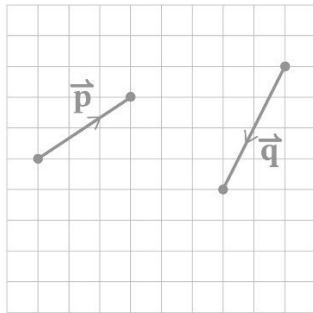
اعتمادًا على الشكل المجاور، أمثل كلا مما يأتي هندسيًا:

① $2\vec{p}$

② $-\frac{1}{2}\vec{q}$

③ $3\vec{p} + 2\vec{q}$

④ $2\vec{q} - \vec{p}$





مثال إذا كان: $\vec{m} = \langle 1, -3 \rangle$ ، وكان: $2\vec{m} + 5\vec{n}$ فأجد $\vec{n} = \langle -2, 7 \rangle$



الضرب القياسي، والزوية بين متجهين

أجد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كل مما يأتي:

① $\vec{u} = \langle 2, -5 \rangle, \vec{v} = \langle 3, -1 \rangle$

② $\vec{m} = \langle -3, -4 \rangle, \vec{n} = \langle 8, 6 \rangle$

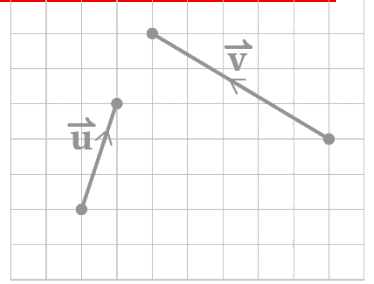
③ $\vec{r} = \langle -5, 4 \rangle, \vec{s} = \langle 2, 3 \rangle$

④ $\vec{q} = \langle 11, 8 \rangle, \vec{p} = \langle -4, -5 \rangle$



مثال اعتماداً على الشكل المجاور، أمثل كلا مما يأتي هندسيًا:

① $\vec{u} + \vec{v}$



② $2\vec{u} - \vec{v}$



جمع المتجهات المكتوبة في الصورة الإحداثية وطرحها وضربها في عدد حقيقي

إذا كان: $\vec{u} = \langle 3, -2 \rangle$ ، وكان: $\vec{v} = \langle 6, 9 \rangle$ ، فأجد كلا مما يأتي:

① $\vec{u} + \vec{v}$

② $\vec{v} - \vec{u}$

③ $3\vec{u} + 2\vec{v}$

④ $-2\vec{u} + \vec{v}$

التعب الذي تُنكره الآن، ستشكره لاحقًا.





مثال

أجد قياس الزاوية بين المتجه:

$\vec{u} = \langle 3, -2 \rangle$ والمتجه: $\vec{v} = \langle -4, -3 \rangle$



أجد قياس الزاوية بين كل متجهين مما يأتي:

① $\vec{a} = \langle 3, 7 \rangle, \vec{b} = \langle 5, 1 \rangle$

② $\vec{c} = \langle 2, -3 \rangle, \vec{d} = \langle -6, 9 \rangle$



مثال

إذا كان المتجه: $\vec{a} = \langle 3n - 4, -10 \rangle$

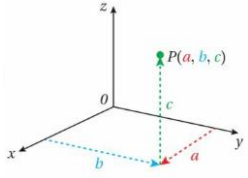
والمتجه: $\vec{b} = \langle 4, n \rangle$ متعامدين، فما قيمة n ؟



لا تجعل صعوبة الطريق سبباً للتوقف، بل اجعلها سبباً لتثبت لنفسك أنك أقوى مما تظن.



الدرس الأول: المتجهات في الفضاء



لتحديد موقع النقطة $P(a, b, c)$ في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد، أعيّن النقطة (a, b) في المستوى xy أولاً، ثم أتحرك إلى الأعلى أو إلى الأسفل بموازية المحور z ، تبعاً لقيمة الحدائ وإشارته.

يستعمل الورق المنقط متساوي القياس لتعيين النقاط في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد بدقة؛ لأن أطوال الوحدات على المحاور الثلاثة متساوية.

أتعلم

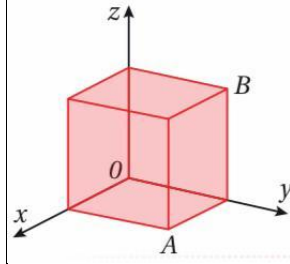
يطلق على نقطة تقاطع المحاور الإحداثية الثلاثة اسم نقطة الأصل، وهي: $O(0, 0, 0)$.



مثال
أعين كل نقطة مما يأتي في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد:

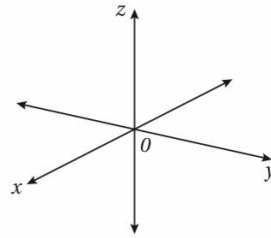
① $A(2, 4, 3)$

② $B(2, -3, -1)$



مسألة اليوم: يمثل الشكل المجاور مكعباً طول ضلعه 5cm ، ما إحداثيات كل من الرأس A ، والرأس B ؟

نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد

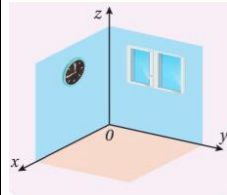


تعلمت سابقاً كيف أحدد موقع نقطة في المستوى الإحداثي باستعمال المحور x والمحور y المتعامدين، وزوجاً من الإحداثيات في صورة (x, y) ، إلا أن المستوى الإحداثي ليس كافياً لتحديد موقع نقطة ما في الفضاء.

يمكن تحديد موقع نقطة في الفضاء بإضافة محور ثالث عمودي إلى كل من المحور x والمحور y ، يسمى المحور z ، عندئذ يحدد الثلاثي المرتب (x, y, z) موقع النقطة في الفضاء.

لغة الرياضيات:

ينتج من إضافة المحور z ما يسمى نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد.



أتعلم

يشبه الثمن جزءاً من غرفة بين حائطين متقاطعين وأرضية الغرفة.

ينتج من إضافة المحور z ثلاثة مستويات، هي: المستوى xy ، والمستوى xz ، والمستوى yz . وتقسم هذه المستويات الفضاء إلى أقسام، يسمى كل منها الثمن (*octant*).



أتحقق من فهمي:

أعين كلا من النقاط الآتية في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد:

a) $(-3, 2, 4)$

b) $(1, 0, -4)$

c) $(5, -4, -2)$

d) $(-4, -2, 3)$

المسافة بين نقطتين، وإحداثيات مفهوم أساسي

نقطة المنتصف في الفضاء إذا كانت: $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ فإن المسافة بين النقطتين A و B تعطى بالصيغة الآتية:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

وإحداثيات نقطة منتصف \overline{AB} هي:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

رموز رياضية:

يستعمل الرمز M للدلالة على منتصف القطعة المستقيمة؛ وهو الحرف الأول من الكلمة الإنجليزية (midpoint) التي تعني نقطة المنتصف.



مثال

إذا كانت: $A(-4, 7, -2), B(6, 1, -4)$ فأجد كلا مما يأتي:

① المسافة بين A و B .

② إحداثيات نقطة منتصف \overline{AB}

المسافة بين نقطتين، وإحداثيات نقطة المنتصف في الفضاء

إن عمليتي حساب المسافة بين نقطتين في الفضاء، وإيجاد إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء، تشبهان حساب المسافة بين نقطتين، وإيجاد إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي.

حين تتعب، تذكّر أهلك الذين ينتظرون فرحتك، وتذكّر نفسك وأنت ترفع رأسك بنتيحتك.



أتحقق من فهمي:

إذا كانت: $N(2, 1, -6), M(5, -3, 6)$ ، فأجد

كلا مما يأتي:

① المسافة بين M و N .

② إحداثيات نقطة منتصف \overline{MN}

رموز رياضية:

يرمز إلى المتجه بحرفين فوقهما الرمز (\rightarrow) ، أو بحرف غامق فوقه الرمز (\dashrightarrow) .

أتعلم

تسمى v_1, v_2, v_3 إحداثيات المتجه \vec{v} ، ويعبر كل منها عن مقدار الإزاحة بالنسبة إلى المحور x ، أو المحور y ، أو المحور z .

يمكن حساب مقدار المتجه (طول المتجه) في الفضاء بطريقة مشابهة لحسابه في المستوى الإحداثي.

مفهوم أساسي مقدار المتجه في الفضاء

إذا كانت: $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ نقطتي بداية المتجه \overline{AB} ونهايته ، فإن:

$$|\vec{v}| = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

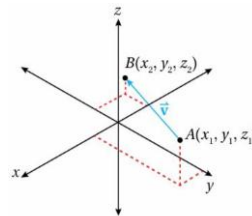
وإذا كان: $\vec{v} = \overline{AB} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ ، فإن:

$$|\vec{v}| = |\overline{AB}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$



مثال

إذا كان: $A(-3, 6, 1), B(4, 5, -2)$ ، فأكتب المتجه \overline{AB} بالصورة الإحداثية، ثم أجد مقداره.



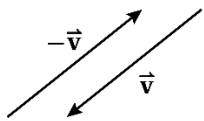
تمثل المتجهات في الفضاء بطريقة مشابهة لتمثيلها في المستوى الإحداثي. فالمتجه \vec{v} الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1, z_1)$ ونقطة نهايته $B(x_2, y_2, z_2)$ يمثل في الفضاء بسهم، بدايته A ونهايته B كما في الشكل المجاور، ويرمز إليه بالرمز \overline{AB} ، أو الرمز \vec{v} .

يمكن كتابة المتجه بالصورة الإحداثية عن طريق طرح إحداثيات نقطة البداية من إحداثيات نقطة النهاية كما يأتي:

$$\vec{v} = \overline{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

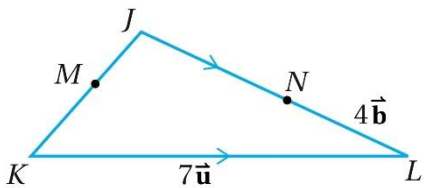
أتذكر

معكوس المتجه \vec{v} هو متجه له نفس مقدار المتجه \vec{v} ، لكنه يكون في اتجاه معاكس له، ويرمز إليه بالرمز $-\vec{v}$.



مثال

في المثلث JKL المجاور، إذا كانت M نقطة منتصف \overline{JK} ، وكانت: $JN:NL = 3:2$ ، وكانت: $\overline{KL} = 7\vec{u}$ ، وكانت: $\overline{NL} = 4\vec{b}$ ، فأكتب \overline{JM} بدلالة \vec{u} و \vec{b} .



أتحقق من فهمي:

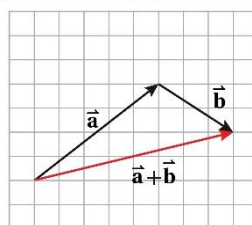


إذا كان: $A(-1, 5, 3), B(-5, 3, -2)$ ، فأكتب المتجه \overline{AB} بالصورة الإحداثية، ثم أجد مقداره.



جمع المتجهات وطرحها وضربها في عدد حقيقي هندسيًا

تعلمت سابقًا أنه لجمع المتجه \vec{a} والمتجه \vec{b} هندسيًا باستعمال قاعدة المثلث، فإنني أرسم المتجه \vec{a} أولاً، ثم أرسم المتجه \vec{b} بحيث

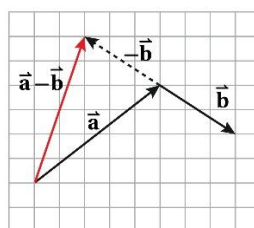


تكون نقطة بدايته هي نقطة نهاية المتجه \vec{a} ، ثم أصل بين نقطة بداية المتجه \vec{a} ونقطة نهاية المتجه \vec{b} كما في الشكل المجاور، فينتج المتجه $\vec{a} + \vec{b}$ الذي يسمى أيضا المحصلة.

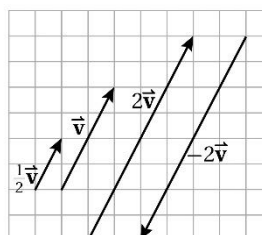
تعلمت أيضا أنه لإيجاد $\vec{a} - \vec{b}$ ، فإنني أجمع المتجه \vec{a} مع معكوس المتجه \vec{b} ؛ أي:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

ومن ثم يمكن إيجاد ناتج طرح $\vec{a} - \vec{b}$ هندسيًا بطريقة مشابهة لعملية الجمع كما في الشكل المجاور.



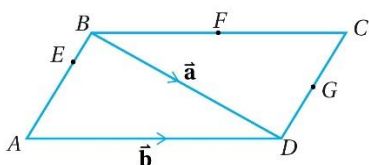
يمكن تمثيل ضرب المتجه \vec{v} في العدد الحقيقي k برسم متجه مواز لـ \vec{v} ، وطوله $|k|$ مرة طول \vec{v} ، وله الاتجاه نفسه إذا كان $k > 0$ ، وله عكس اتجاه \vec{v} إذا كان $k < 0$ كما في الشكل المجاور.



أتحقق من فهمي:



في متوازي الأضلاع $ABCD$ المجاور، إذا كانت F نقطة منتصف \overline{BC} ، و G نقطة منتصف \overline{DC} ، وكانت: $\overline{BD} = \vec{a}$ ، وكانت: $\overline{AD} = \vec{b}$ ، فأكتب كلاهما يأتي بدلالة \vec{a} و \vec{b} .



و G نقطة منتصف \overline{DC} ، وكانت: $\overline{BD} = \vec{a}$ ، وكانت: $\overline{AD} = \vec{b}$ ، فأكتب كلاهما يأتي بدلالة \vec{a} و \vec{b} .

a \overline{AB}

$$\textcircled{2} 4\vec{a} - 2\vec{b}$$

$$\textcircled{b} \vec{EB}$$

أتحقق من فهمي:



إذا كان:

$$\vec{u} = \langle 4, 5, -3 \rangle, \vec{v} = \langle 3, 0, -5 \rangle, \vec{w} = \langle 9, -2, -5 \rangle$$

فأجد كلاهما يأتي:

$$\textcircled{a} 3\vec{v} + 4\vec{u}$$

$$\textcircled{b} 3\vec{u} + 5\vec{v} - 2\vec{w}$$

أتعلم

قد يتساوى المتجهان \vec{v} و \vec{w} بالرغم من اختلاف موقعيهما في حال تساوي الاتجاه والمقدار

$$\textcircled{c} \vec{EF}$$

جمع المتجهات وطرحها وضربها في عدد حقيقي جبرياً

يمكن تطبيق عمليات الجمع والطرح والضرب في عدد حقيقي جبرياً على المتجهات في الفضاء كما هو حال المتجهات في المستوى الإحداثي.

مفهوم أساسي
جمع المتجهات وطرحها وضربها في عدد حقيقي

إذا كان: $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle, \vec{w} = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$ متجهين في الفضاء، وكان c عدداً حقيقياً، فإن:

$$\vec{v} + \vec{w} = \langle (v_1 + w_1), (v_2 + w_2), (v_3 + w_3) \rangle$$

$$\vec{v} - \vec{w} = \langle (v_1 - w_1), (v_2 - w_2), (v_3 - w_3) \rangle$$

$$c\vec{v} = \langle cv_1, cv_2, cv_3 \rangle$$

مثال

إذا كان: $\vec{a} = \langle 4, 7, -3 \rangle, \vec{b} = \langle 9, -2, -5 \rangle$ فأجد كلاهما يأتي:

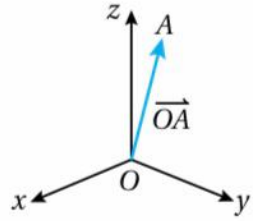
$$\textcircled{1} 2\vec{a} + 3\vec{b}$$

لغة الرياضيات

سمي متجه الموقع بهذا الاسم لأنه يحدد موقع النقطة A بالنسبة إلى نقطة الأصل.

متجها الموقع والإزاحة

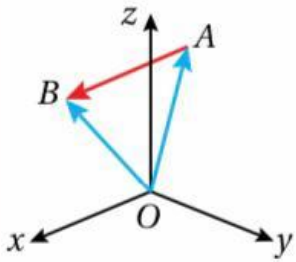
يطلق على المتجه الذي يبدأ بنقطة الأصل، وينتهي بالنقطة $A(x_1, y_1, z_1)$ ، اسم متجه الموقع (position vector) للنقطة A ، ويستعمل الرمز \vec{OA} للدلالة على متجه الموقع للنقطة A .



أما الصورة الإحداثية لهذا المتجه فهي:

$$\vec{OA} = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle - \langle 0, 0, 0 \rangle = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle$$

في الشكل المجاور، يظهر باللون الأزرق متجها الموقع للنقطة A والنقطة B ، وهما: \vec{OA} و \vec{OB} ، ويظهر باللون الأحمر المتجه \vec{AB} الذي يمثل متجه الإزاحة من النقطة A إلى النقطة B .



ألاحظ أن \vec{AB} هو ناتج طرح متجه الموقع للنقطة A من متجه الموقع للنقطة B وفق قاعدة المثلث لجمع المتجهات؛ أي أن: $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$

يمثل مقدار متجه الإزاحة \vec{AB} المسافة بين النقطة A والنقطة B ، وهذه المسافة هي قيمة عددية غير متجهة.

أتعلم

ألاحظ أن كلا من الموقع والإزاحة هو كمية متجهة، وأن المسافة هي قيمة عددية غير متجهة.

تساوي المتجهات

يتساوى متجهان إذا كان لهما الاتجاه والمقدار نفسهما، عندئذ تكون لهما الصورة الإحداثية نفسها؛ أي إن إحداثياتهما المتناظرة تكون متساوية.

مفهوم أساسي المتجهان المتساويان

إذا كان: $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, $\vec{w} = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$ ، فإن:

$\vec{v} = \vec{w}$ إذا وفقط إذا كان:

$$v_1 = w_1, v_2 = w_2, v_3 = w_3$$

مثال

إذا كان: $\vec{u} = \langle 2, 3a - 2, 9 \rangle$ وكان: $\vec{v} = \langle 4 - b, 10, c \rangle$ ، فأجد قيمة كل من: a, b, c .



أنتحقق من فهمي:



إذا كان: $\vec{u} = \langle 20, 2p - 5, -12 \rangle$

وكان: $\vec{v} = \langle 3q + 8, 0, 3r \rangle$ ، فأجد

قيمة كل من: p, q, r .



مثال

إذا كانت $A(-11, 2, 21), B(3, -5, 7)$ ، فأجد كلاهما يأتي:

② متجه الإزاحة من النقطة B إلى النقطة C .

① متجه موقع كل من النقطة A ، والنقطة B .

③ المسافة بين النقطة A والنقطة C .

② متجه الإزاحة من النقطة A إلى النقطة B .

③ المسافة بين النقطة A والنقطة B .

أنحقق من فهمي:

إذا كانت:

$A(-2, 8, 13), B(5, -7, -9), C(0, 1, -14)$

نقاطاً في الفضاء، فأجد كلاهما يأتي:

① متجه موقع كل من النقاط: C, B, A .

متجهات الوحدة الأساسية: $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$

إذا كانت نقطة بداية المتجه \vec{v} هي نقطة الأصل ونقطة نهايته هي (v_1, v_2, v_3) كما في الشكل المجاور، فإنه يمكن التعبير عن ذلك بالصورة الإحداثية: $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$

يطلق على المتجه الذي مقداره وحدة واحدة اسم متجه الوحدة (*unit vector*). وتعد متجهات الوحدة في الاتجاه الموجب للمحاور الإحداثية الثلاثة أهم متجهات الوحدة، وأكثرها استخداماً؛ لذا تسمى متجهات الوحدة الأساسية.

يشار إلى كل من متجهات الوحدة الأساسية الثلاثة برمز خاص؛ إذ يرمز إلى متجه الوحدة في اتجاه محور x الموجب بالرمز \hat{i} ، وصورته الإحداثية هي: $\hat{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$ ، ويرمز إلى متجه الوحدة في اتجاه محور y الموجب بالرمز \hat{j} ، وصورته الإحداثية هي: $\hat{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$ ، ويرمز إلى متجه الوحدة في اتجاه محور z الموجب بالرمز \hat{k} ، وصورته الإحداثية هي: $\hat{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$.

لا تضيع تركيزك في الفلق على ما لم يحدث بعد.

أتحقق من فهمي:



أكتب كلا من المتجهات الآتية بدلالة متجهات

الوحدة الأساسية:

a) $\vec{g} = \langle 9, 0, -4 \rangle$

b) $\vec{AB}: A(2, -1, 4), B(7, 6, -2)$

c) $4\vec{m} - 5\vec{f}: \vec{m} = -2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k},$
 $\vec{f} = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 6\hat{k}$

إيجاد متجه وحدة في اتجاه أي متجه

يمكن إيجاد متجه وحدة في اتجاه أي متجه، وذلك بقسمة ذلك المتجه على مقداره، فيصبح مقدار المتجه الناتج وحدة واحدة.



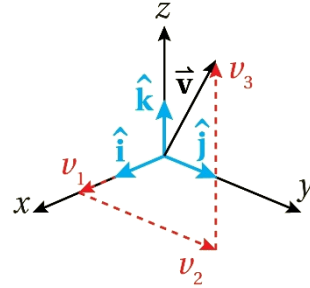
مثال إذا كان: $A(3, 4, -7), B(-5, 16, 2)$ فأجد متجه وحدة في اتجاه \vec{AB}

مثال

أتعلم

الرمز \hat{i} يقرأ: i hat ، والرمز \hat{j} يقرأ: j hat ، والرمز \hat{k} يقرأ: k hat .

يمكن كتابة أي متجه بدلالة متجهات الوحدة: كما هو مبين في ما يأتي:



كتابة المتجه بدلالة

مفهوم أساسي متجهات الوحدة الأساسية

يمكن كتابة المتجه: $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية كما يأتي:

$$\vec{v} = v_1\hat{i} + v_2\hat{j} + v_3\hat{k}$$

مثال

① أكتب المتجه: $\vec{u} = \langle 5, -3, 6 \rangle$ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية.

② إذا كان: $\vec{u} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}, \vec{v} = 4\hat{i} + 7\hat{k}$ فأكتب المتجه: $2\vec{u} + 3\vec{v}$ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية.



أدرب وأحل المسائل:



أعين كلا من النقاط الآتية في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد:

① $(4, 5, 3)$

② $(-2, 3, -5)$

③ $(4, 0, -3)$

أجد الطول وإحداثيات نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة التي أعطى طرفاها في كل مما يأتي:

④ $(3, -2, 8), (5, 4, 2)$

أنتحق من فهمي:



أجد متجه وحدة في كل متجه مما يأتي:

a) $\vec{u} = \langle 4, -3, 5 \rangle$

b) $\vec{v} = 8\hat{i} + 15\hat{j} - 17\hat{k}$

c) $\overline{AB}: A(-1, 4, 6), B(3, 3, 8)$

$$\textcircled{11} \vec{e} = -5\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$$

$$\textcircled{5} (-2, 7, 0), (2, -5, 3)$$

$$\textcircled{12} \vec{AB}: A(4, 1, 1), B(-3, 6, 3)$$

$$\textcircled{6} (12, 8, -5), (-3, 6, 7)$$

$$\textcircled{13} \vec{GH}: G(1, -3, 5), H(0, 4, -2)$$

$$\textcircled{7} (-5, -8, 4), (3, 2, -6)$$

أجد الصورة الإحداثية والمقدار للمتجه \vec{AB} الذي أعطيت نقطة بدايته ونقطة نهايته في كل مما يأتي:

$$\textcircled{14} A(4, 6, 9), B(-3, 2, 5)$$

أمثل كلا من المتجهات الآتية بيانياً في الفضاء:

$$\textcircled{8} \vec{v} = \langle -3, -4, 5 \rangle$$

$$\textcircled{9} \vec{m} = \langle 2, -3, -4 \rangle$$

$$\textcircled{15} A(-8, 5, 7), B(6, 3, 2)$$

$$\textcircled{10} \vec{p} = \langle -3, 5, -2 \rangle$$

20 أكتب \overline{NR} بدلالة \vec{a}, \vec{b}

إذا كان: $\vec{e} = \langle -3, 9, -4 \rangle$

$\vec{f} = 5\hat{i} - 3\hat{j} + 7\hat{k}$,

$\vec{g} = \langle -1, 8, -5 \rangle$ ، فأجد كلا مما

21 $3\vec{e} + 4\vec{f}$

22 $\vec{e} + \vec{f} - 3\vec{g}$

23 $4\vec{e} - 2\vec{f} + 3\vec{g}$

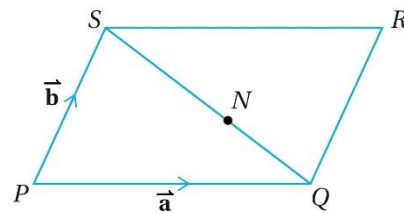
24 $2\vec{e} + 7\vec{f} - 2\vec{g}$

16 $A(12, -5, 4), B(4, 1, -1)$

17 $A(24, -8, 10), B(10, 6, 3)$

18 إذا كان OAB مثلثًا، فيه: $\overline{OA} = \vec{a}, \overline{OB} = \vec{b}$ ، والنقطة C هي منتصف \overline{AB} ، فأكتب المتجه \overline{OC} بدلالة \vec{a}, \vec{b} .

يمثل الشكل المجاور متوازي الأضلاع $PQRS$ ، الذي تقع فيه النقطة N على \overline{SQ} ، حيث: $\overline{PQ} = \vec{a}, \overline{PS} = \vec{b}$ ، $SN:NQ = 3:2$



19 أكتب \overline{SQ} بدلالة \vec{a}, \vec{b}

$$\textcircled{30} \overrightarrow{ST}: S(1, 0, -5), T(2, -2, 0)$$

$$\textcircled{31} -\vec{a} + 3\vec{b}: \vec{a} = 1\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}, \\ \vec{b} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$$



أجد متجه وحدة في اتجاه كل
متجه مما يأتي:

$$\textcircled{32} \vec{a} = -4\hat{i} + 3\hat{j}$$

$$\textcircled{33} \vec{b} = 143\hat{i} - 24\hat{j}$$

$$\textcircled{34} \vec{c} = 72\hat{i} + 33\hat{j} + 56\hat{k}$$

إذا كانت:

$A(-1, 6, 5), B(0, 1, -4), C(2, 1, 1)$
نقاطاً في الفضاء، فأجد كلا مما
يأتي:

متجه موقع كل من النقاط: C, B, A $\textcircled{25}$

متجه الإزاحة من النقطة B إلى النقطة A $\textcircled{26}$

متجه الإزاحة من النقطة C إلى النقطة B $\textcircled{27}$

المسافة بين النقطة C والنقطة B $\textcircled{28}$



أكتب كلا من المتجهات الآتية
بدلالة متجهات الوحدة الأساسية:

$$\textcircled{29} \vec{g} = \langle 5, 7, -1 \rangle$$

40 إذا كان: $\vec{m} = \langle 4, 1, -2 \rangle$

$\vec{n} = \langle 6, 2, -3 \rangle, \vec{p} = \langle 2, a, -1 \rangle$

فما قيمة الثابت a ، $5\vec{m} + 2\vec{p} = 4\vec{n}$



41 إذا كان: $\vec{v} = \langle u - 3, u + 1, u - 2 \rangle$ ،

وكان: $|\vec{v}| = 17$ ، فما قيمة u



42 إذا كان متجهها الموقع للنقطة G والنقطة H

هما:

$\vec{h} = \langle c - 1, -4, c + 2 \rangle, \vec{g} = \langle -2, c + 1, -8 \rangle$

على الترتيب، فأجد قيمة c ، علماً بأن: $|\vec{GH}| = 19$

، وأن: $c > 0$ ،



35 $\vec{d} = \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ 8 \end{pmatrix}$

36 $\vec{e} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

37 $\vec{n} = \langle -2, 0, 3 \rangle$



38 إذا كان:

$\vec{a} = -3\hat{i} + 4\hat{j} + 12\hat{k}, \vec{b} = 7\hat{i} + 39\hat{j} - 2\hat{k}$

وكان: $3\vec{a} + c\vec{b} = -23\hat{i} - 66\hat{j} + 40\hat{k}$

فأجد قيمة c .



39 إذا كان: $\vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ w + 47 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{t} = \begin{pmatrix} 3 \\ v \\ 2 \end{pmatrix}$ ، وكان:

$k\vec{s} - 4\vec{t} = \begin{pmatrix} 6 \\ 31 \\ w \end{pmatrix}$ ، فأجد قيمة كل من k, w, v



مهارات التفكير العليا:

أكتشف الخطأ:

43 قالت حنان: "إذا كانت النقطة $A(7, -3, 3)$ تقع على كرة مركزها نقطة الأصل، فإن النقطة $B(2, -8, -1)$ تقع خارج هذه الكرة". في حين قالت هديل: "النقطة تقع داخل هذه الكرة". أي القولين صحيح؟ أبرر إجابتي.

تبرير:

45 تمثل النقاط:

$$A(2, 3, -1), B(2, 3, 5), C(8, -3, 5)$$

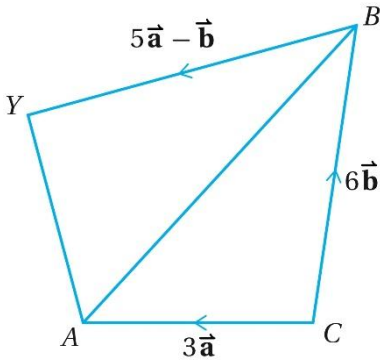
ثلاثة من رؤوس مكعب خشبي، كل وجهين من أوجهه يوازيان أحد المستويات: xy, xz, yz . أكتب إحداثيات الرؤوس الخمسة الأخرى، ثم أبرر إجابتي.

تحد:

46 في الشكل الآتي، إذا كان: $\vec{CB} = 6\vec{b}$

، وكانت X تقع على \vec{AB} ، حيث $AX:XB = 1:2$ ، $\vec{CA} = 3\vec{a}$ ، $\vec{BY} = 5\vec{a} - \vec{b}$ ،

فأثبت أن: $\vec{CX} = \frac{2}{5}\vec{CY}$



تبرير:

44 إذا وقعت النقطة $J(-4, 6, -1)$ والنقطة $K(-2, 2, 17)$ على طرفي أحد أقطار كرة، فأبين أن النقطة $L(2, 10, 3)$ والنقطة $M(4, -2, 7)$ تقعان على سطح تلك الكرة، ثم أبرر إجابتي.

كتاب التمارين

أعين كلا من النقاط الآتية في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد:

① $A(0, 2, -3)$

② $B(-1, 0, 4)$

③ $C(2, 4, 3)$

④ $D(-3, -2, -5)$

تحد:

إذا كانت متجهات الموقع للنقاط: M, L, N هي:

$$\vec{m} = -3\hat{i} - 6\hat{j} + \hat{k},$$

$$\vec{l} = 4\hat{i} - 10\hat{j} + 3\hat{k}, \vec{n} = 5\hat{i} + 3\hat{j} - 9\hat{k}$$

الترتيب، فأجيب عن السؤالين الآتيين تبعاً:

④7 أثبت أن المثلث LMN قائم الزاوية.

④8 أجد مساحة المثلث LMN .

أكتب الصورة الإحداثية لكل من المتجهات الآتية، ثم أجد مقدار كل منها:

⑩ \overline{AB} حيث: $A(-2, 5, 0), B(4, 9, -3)$

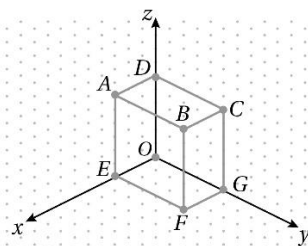
⑪ \overline{EF} ، حيث: $E(3, 4, 6), F(6, 8, -6)$

⑫ \overline{GH} ، حيث: $H(10, 7, 8), G(-2, 3, 2)$

أجد متجه وحدة في اتجاه كل متجه مما يأتي:

⑬ $\overline{AC} = 8\hat{i} + 5\hat{j} - 3\sqrt{5}\hat{k}$

⑭ $\vec{v} = \langle -5, 4, 20 \rangle$



في متوازي المستطيلات المجاور، إذا كانت إحداثيات الرأس B هي:

$(3, 5, 6)$ ، فأكتب إحداثيات كل مما يأتي:

⑤ الرأس A

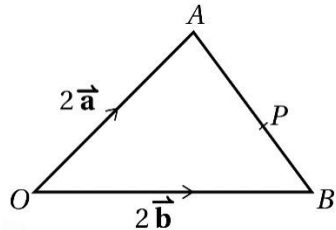
⑥ الرأس C

⑦ الرأس D

⑧ الرأس F

⑨ مركز متوازي المستطيلات $ABCDOEFG$.

19) في المثلث OAB المجاور، تقع النقطة P على الضلع AB ، حيث: $AP:PB = 5:3$. إذا كان: $\vec{OP} = k(3\vec{a} + 5\vec{b})$ ، فما قيمة العدد الحقيقي k ؟



20) متجه الموقع للنقطة L والنقطة M هما: $\langle -3, 4, -5 \rangle$ و $\langle 0, -2, 4 \rangle$ على الترتيب. أجد متجه الموقع للنقطة N التي تقع على \overline{LM} ، علمًا بأن: $\vec{LN} = \frac{1}{2}\vec{NM}$

21) $ABCD$ متوازي أضلاع، فيه: $\vec{AC} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ و $\vec{BD} = -6\hat{i} + 7\hat{j} + 2\hat{k}$ و $\vec{AB} = \vec{a}$ و $\vec{AD} = \vec{b}$. أجد كلا من \vec{a} و \vec{b} بدلالة متجهات الوحدة الأساسية.

15) أجد متجهًا له نفس اتجاه المتجه:

$$\vec{v} = 4\hat{i} - 12\hat{j} + 3\hat{k} \text{ ، ومقداره } 52$$

إذا كان: $\vec{u} = 3\hat{i} + 5\hat{j} - 7\hat{k}$

، فأجد كلا مما $\vec{v} = \langle -4, 3, -6 \rangle$

$$16) 2\vec{u} + 4\vec{v}$$

$$17) 3\vec{u} - 2\vec{v}$$

18) أجد قيمة كل من الأعداد الحقيقية: $cboga$

$$a\vec{u} + 5\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ b \\ c \end{pmatrix}$$
 التي تحقق المعادلة الآتية:

26 \overrightarrow{UT}

27 \overrightarrow{TA}

28 \overrightarrow{OS}

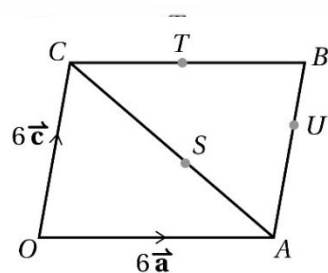
29 \overrightarrow{US}

30 \overrightarrow{SB}

22 إذا كان: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

فأجد الأعداد الحقيقية: p, q, r التي تحقق المعادلة

$$p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c} = \begin{pmatrix} 28 \\ -12 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{الآتية:}$$



في الشكل المجاور،
متوازي أضلاع،
فيه: $\overrightarrow{OA} = 6\vec{a}$

، والنقطة T
هي منتصف الضلع

BC ، والنقطة U تقع على الضلع AB ، حيث:
 CA والنقطة S تقع على القطر
، حيث: $AU:UB = 2:1$ ،
 $CS:SA = 3:2$.

أكتب كلا من المتجهات الآتية بدلالة \vec{a} و \vec{c} :

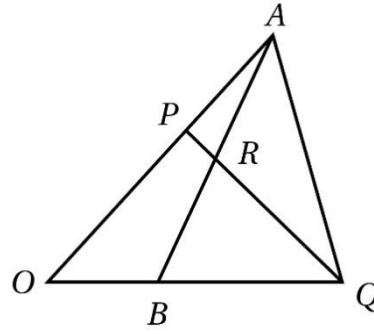
23 \overrightarrow{OB}

24 \overrightarrow{AC}

25 \overrightarrow{OU}

33 أجد قيمة كل من k و h .

في المثلث OAQ المجاور، إذا كان $\vec{OA} = \vec{a}$ ، وكان



وكانت $\vec{OB} = \vec{b}$ ، وكانت

$$OP:OA = 3:5$$

وكانت

$$OB:BQ = 1:2$$

فأجب عن الاسئلة
الأربعة الآتية:

31 إذا علم أن $\vec{AR} = h\vec{AB}$ ، حيث h عدد حقيقي،

و $0 < h < 1$ ، فأثبت أن:

$$\vec{OR} = (1-h)\vec{a} + h\vec{b}$$

34 أجد النسبة $\vec{PR}:\vec{PQ}$.

32 إذا علم أن $\vec{PR} = k\vec{PQ}$ ، حيث k عدد حقيقي،

و $0 < k < 1$ ، فأكتب \vec{OR} بدلالة \vec{a} ، \vec{b} ، k .

الدرس الثاني: المستقيمات في الفضاء



مثال إذا كان: $A(-2, 5, -3), B(1, -3, 2)$

فأحدد إن كان كل متجهين مما يأتي متوازيين أم لا:

① $\overline{AB}, \overline{CD}$

② $\overline{AC}, \overline{BD}$

تحقق من فهمي:



إذا كان: $G(7, 5, -11), H(4, 4, -4)$

فأحدد إن كان كل

متجهين مما يأتي متوازيين أم لا:

a) $\overline{GH}, \overline{KL}$

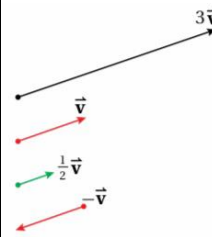
b) $\overline{GL}, \overline{HK}$



مسألة اليوم: أرسلت إشارة لاسلكية من موقع إحداثياته: $(-1, 4, 5)$ إلى موقع إحداثياته: $(-11, 9, 15)$. وفي الوقت نفسه، أرسلت إشارة من موقع إحداثياته: $(-5, 9, 3)$ إلى موقع إحداثياته: $(2, -5, 17)$. إذا علمت أن الإشارة تسير في خط مستقيم، فهل يتقاطع مسارا الإشارتين؟

توازي المتجهات

المتجهان المتوازيان هما متجهان لهما الاتجاه نفسه، أو عكسه، وليس شرطاً أن يكون لهما المقدار نفسه، وهذا يعني أنه يمكن كتابة كل منهما في صورة المتجه الآخر مضروباً في عدد حقيقي.



أتذكر

إذا ضرب المتجه \vec{v} في العدد الحقيقي k ، فإن المتجه $k\vec{v}$ يأخذ اتجاه \vec{v} نفسه إذا كان $k > 0$ ، ويكون عكس اتجاه \vec{v} إذا كان $k < 0$.

مفهوم توازي المتجهات

إذا كان: $\vec{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle, \vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ فإن:

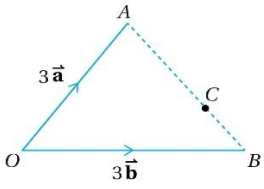
$\vec{v} \parallel \vec{u}$ إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي k ،

حيث: $k \neq 0$ بحيث يكون:

$$\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = k \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$$

لإثبات أن ثلاث نقاط في الفضاء تقع على استقامة واحدة، يكفي إثبات وجود متجهين متوازيين بينهما نقطة مشتركة، وتكون النقاط الثلاث هي نقاط بداية أو نهاية لهذين المتجهين.

مثال

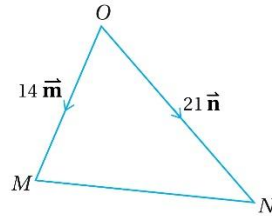


يظهر في الشكل المجاور المثلث OAB والنقطتان D و C .

إذا كان: $\vec{OA} = 3\vec{a}$, $\vec{OB} = 3\vec{b}$ وكانت النقطة C تقع على \vec{AB} ، حيث: $AC = 2CB$ ، وكان: $\vec{BD} = 2\vec{a} + \vec{b}$ ، فأثبت أن D و C و O تقع على استقامة واحدة.

يمكن استعمال تعريف توازي المتجهات لإثبات بعض علاقات التوازي في الأشكال الهندسية.

مثال



في المثلث OMN المجاور، إذا

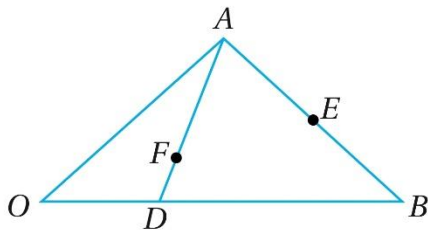
كان: $\vec{ON} = 21\vec{n}$ ، $\vec{OM} = 14\vec{m}$ وكانت النقطة P تقع على \vec{MN}

حيث: $OP:PM = 2:5$ ، والنقطة Q تقع على \vec{ON} ، حيث: $ON = \frac{7}{2}OQ$ ، فأثبت أن \vec{PQ} يوازي \vec{MN} .

أتحقق من فهمي:



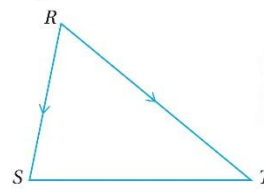
يظهر في الشكل المجاور المثلث OAB . إذا كان: $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ وكانت النقطة D تقع على \vec{OB} ، والنقطة E منتصف \vec{AB} ، والنقطة F تقع على \vec{AD} ، حيث: $\vec{OF} = \frac{2}{5}(\vec{a} + \vec{b})$ ، فأثبت أن E و F و O تقع على استقامة واحدة.

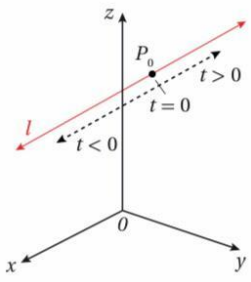


أتحقق من فهمي:



في المثلث RST المجاور، إذا كان: $\vec{RS} = 4\vec{a}$ ، $\vec{RT} = 6\vec{b}$ والنقطة U منتصف \vec{RS} ، والنقطة V منتصف \vec{RT} ، فأثبت أن \vec{ST} يوازي \vec{UV} .





الواقعة في اتجاه \vec{v} بدءاً بـ P_0 ،
وقيم t السالبة تحدد النقاط
الواقعة عكس اتجاه \vec{v} بدءاً بـ P_0 .

أتعلم

المعادلة المتجهة للمستقيم لها عدة صور متكافئة تختلف باختلاف النقطة P_0 .

مفهوم أساسي المعادلة المتجهة للمستقيم

المعادلة المتجهة للمستقيم l الذي يوازي المتجه \vec{v} ، ويمر بنقطة متجه الموقع لها \vec{r}_0 ، هي: $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$

مثال

أجد معادلة متجهة للمستقيم l الذي يوازي المتجه: $\vec{v} = \langle -4, 2, 7 \rangle$ ، ويمر بالنقطة $U(2, -3, 5)$.



أتحقق من فهمي:



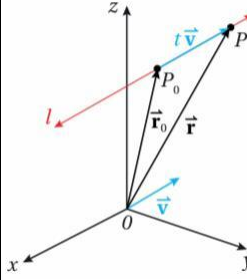
أجد معادلة متجهة للمستقيم l الذي يوازي المتجه: $\vec{v} = \langle 1, -4, -5 \rangle$ ، ويمر بالنقطة $U(0, -6, 9)$.

أتعلم

إذا كان \vec{v} اتجاهًا للمستقيم l ، فإن $k\vec{v}$ ، حيث: $k \neq 0$ ، هو أيضًا اتجاهًا للمستقيم l .

يطلق على هذه الصيغة اسم المعادلة المتجهة للمستقيم (vector equation of a line). يسمى المتغير t في المعادلة السابقة المتغير الوسيط (parameter)، وتحدد كل قيمة من قيم t نقطة وحيدة على المستقيم. فمثلاً، $t = 0$ تحدد النقطة P_0 ، وقيم t الموجبة تحدد النقاط

تعلت سابقاً استعمال الميل ومقطع المحور y لكتابة معادلة مستقيم في المستوى الإحداثي. والآن سأتعلم كيف أستعمل المتجهات لكتابة معادلة المستقيم في الفضاء.



في الشكل المجاور، يمر بالمستقيم l بالنقطة المعروفة P_0 ، موازياً للمتجه \vec{v} ، ولتكن النقطة P أي نقطة على المستقيم l . ومن ثم، فإن المتجه $\overrightarrow{P_0P}$ يوازي المتجه \vec{v} ؛ لذا يمكن كتابته في صورة: $\overrightarrow{P_0P}$ ، حيث t عدد حقيقي.

ووفقاً لقاعدة المثلث لجمع المتجهات، فإن متجه الموقع للنقطة P يساوي مجموع متجه الموقع للنقطة P_0 والمتجه $\overrightarrow{P_0P}$ ؛ أي أن:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P}$$

وإذا كان متجه الموقع للنقطة P هو \vec{r} ، ومتجه الموقع للنقطة P_0 هو \vec{r}_0 ، فإن:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$$

أتذكر

تحدد أي نقطتين على المستقيم في المستوى الإحداثي ميل هذا المستقيم. أما في الفضاء فإن أي نقطتين على المستقيم تحددان باتجاهه.

يمكن استعمال المعادلة المتجهة للمستقيم في التحقق من وقوع نقطة معلومة عليه أم لا، وإيجاد نقطة تقع عليه، علم أحد إحداثياتها.

مثال

تمثل: $\vec{r} = \langle -2, 9, 1 \rangle + t\langle -3, 1, 2 \rangle$
معادلة متجهة للمستقيم l :

③ أبين أن النقطة $(19, 2, -13)$ تقع على المستقيم l .

④ أجد نقطة على المستقيم، إحداثي z لها هو 25

أتحقق من فهمي:



تمثل: $\vec{r} = 11\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k} + t(7\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k})$
معادلة متجهة للمستقيم l :

④ أبين أن النقطة التي متجه الموقع لها هو $(39\hat{i} - 3\hat{j} + 14\hat{k})$ تقع على المستقيم l .

يمكن بسهولة تحديد متجه مواز لمستقيم يمر بنقطتين معلومتين؛ وهو المتجه الذي يقع على المستقيم، وطرفاه هاتان النقطتان.

إذا علمت نقطتان يمر بهما المستقيم، فيمكن عندئذ كتابة معادلته المتجهة باتباع الخطوتين الآتيتين:

إيجاد الصورة الإحداثية للمتجه الموازي، الذي طرفاه النقطتان المعلومتان، بصرف النظر عن النقطة التي يبدأ منها المتجه.

تعويض متجه الموقع لإحدى النقطتين والمتجه الموازي للمستقيم في صيغة المعادلة المتجهة للمستقيم.

مثال

أجد معادلة متجهة للمستقيم l المار بالنقطتين:

$Q(19, 5, -10), P(5, -2, 18)$.

أتحقق من فهمي:



أجد معادلة متجهة للمستقيم l المار بالنقطتين: $N(2, -4, 3), M(3, 7, -9)$.

مفهوم أساسي: المستقيمات المتوازية

إذا كانت: $\vec{r} = \vec{a} + t\vec{b}$ معادلة متجهة للمستقيم l_1 ، وكانت: $\vec{r} = \vec{c} + u\vec{d}$ معادلة متجهة للمستقيم l_2 ، فإن: $l_1 \parallel l_2$ إذا وفقط إذا كان $\vec{b} \parallel \vec{d}$.

يمكن الحكم على تقاطع المستقيمين:

بمساواة $l_2: \vec{r} = \vec{c} + u\vec{d}$ و $l_1: \vec{r} = \vec{a} + t\vec{b}$ متجهي الموقع \vec{r} في معادليهما، وحل المعادلات الثلاث الناتجة لإيجاد قيمة كل من المتغير t والمتغير u . فإذا تحققت المعادلات الثلاث لقيمتي هذين المتغيرين، كان المستقيمان متقاطعين. وإذا كان المستقيمان غير متوازيين وغير متقاطعين، فإنهما يكونان متخالفيين.

إرشاد

إذا جاء في المسألة أكثر من مستقيم، فاستعمل رموزًا مختلفة للمتغير الوسيط.

مثال

إذا كانت:

$$\vec{r} = \langle 3, -3, -6 \rangle + t\langle 2, -4, 3 \rangle \quad \text{معادلة}$$

متجهة للمستقيم l_1 ، وكانت:

$$\vec{r} = \langle 4, 7, 0 \rangle + u\langle 1, 2, 3 \rangle \quad \text{معادلة متجهة}$$

للمستقيم l_2 ، فأحدد إن كان المستقيمان:

l_2, l_1 متوازيين، أو متقاطعين، أو متخالفيين،

ثم أجد إحداثيات نقطة تقاطعهما إذا كانا متقاطعين.

(b) أجد متجه الموقع للنقطة التي تقع على هذا المستقيم، وتقابل القيمة: $t = -3$.

(c) إذا كانت النقطة $(v, -3v, 5v - 1)$ تقع على المستقيم l ، فما قيمة v ؟

المستقيمات المتوازية والمتقاطعة والمتخالفة

يكون المستقيمان في المستوى الإحداثي متوازيين، أو متقاطعين. أما في الفضاء فتوجد حالة ثالثة، هي أن يكون المستقيمان متخالفيين (*skew*)؛ أي غير متوازيين، وغير متقاطعين، مثل المستقيمين: l_2, l_1 في الشكل المجاور.

إذا علمت معادلتا مستقيمين في الفضاء، فيمكن الجزم بتوازيهما إذا كان اتجاه كل منهما موازيًا للآخر؛ أي إن أحدهما ينتج من ضرب الآخر في عدد حقيقي.

أتذكر

يتوازي المتجهان: \vec{u} و \vec{v} إذا كان $\vec{u} = k\vec{v}$ ، حيث k عدد حقيقي، و $k \neq 0$ ، ويرمز إلى هذا التوازي بالرمز: $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

أتحقق من فهمي:



→ عرض جوي: أقلعت طائرة من موقع إحداثياته: $(0,7,0)$ ، وفي الوقت نفسه، أقلعت طائرة ثانية من موقع إحداثياته: $(-2,0,0)$. وبعد التحليق مدة قصيرة في مسارين مستقيمين، أصبحت الطائرة الأولى عند الموقع الذي إحداثياته: $(8,15,16)$ ، وأصبحت الطائرة الثانية عند الموقع الذي إحداثياته: $(22,24,48)$. هل خطأ سير الطائرتين متوازيان، أم متقاطعان، أم متخالفان؟

أتحقق من فهمي:



إذا كانت: $\vec{r} = \langle 3, 7, -9 \rangle + t\langle 1, 11, -12 \rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_1 ، وكانت: $\vec{r} = \langle -30, -6, 30 \rangle + u\langle 4, -6, 3 \rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_2 ، فأحدد إن كان المستقيمان: l_2, l_1 متوازيين، أو متقاطعين، أو متخالفين، ثم أجد إحداثيات نقطة تقاطعهما إذا كانا متقاطعين.



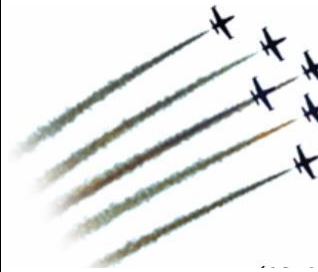
تستعمل المعادلات المتجهة في كثير من المواقف الحياتية والعلمية، كما في خطوط الملاحة الجوية.



من الحياة:

مثال

⚡️ أفكر: إذا كانت مسارات الطائرات في عرض جوي مستقيمة ومتقاطعة، فهل يؤكد ذلك أن الطائرات ستصطدم؟ أبرر إجابتي.



→ عرض جوي: أقلعت طائرة من موقع إحداثياته: $(13,7,0)$. وفي الوقت نفسه، أقلعت طائرة ثانية من موقع إحداثياته $(-2,5,0)$. وبعد التحليق مدة قصيرة في مسارين مستقيمين، أصبحت الطائرة الأولى عند الموقع الذي إحداثياته: $(19,10,20)$ ، وأصبحت الطائرة الثانية عند الموقع الذي إحداثياته: $(-11,15,20)$.

هل خطأ سير الطائرتين متوازيان، أم متقاطعان، أم متخالفان؟



أدرب وأحل المسائل:

أحدد إذا كان المتجهان متوازيين أم لا في كل مما يأتي:

① $\langle 8, 12, 24 \rangle, \langle 15, 10, -20 \rangle$

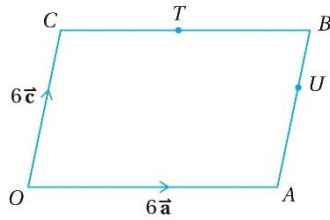
② $\langle 27, -48, -36 \rangle, \langle 9, -16, -12 \rangle$

③ $\langle -6, -4, 10 \rangle, \langle -3, -1, 13 \rangle$

④ $\langle 12, -8, 32 \rangle, \langle 21, -14, 56 \rangle$

⑥ في متوازي الأضلاع $OABC$ المجاور،

والنقطة T هي منتصف الضلع CB ، والنقطة U تقسم AB بنسبة 1 : 2 إذا مد الضلع OA على استقامته إلى النقطة X ، حيث $OA = AX$ ، فأثبت أن X, U, T تقع على استقامة واحدة.



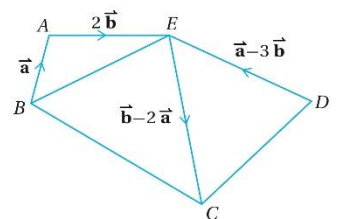
أجد معادلة متجهة للمستقيم الذي يوازي المتجه \vec{a} ، ويمر بنقطة متجه الموقع لها \vec{b} في كل مما يأتي:

⑦ $\vec{a} = -\hat{i} + \hat{j}, \vec{b} = 5\hat{i} + 3\hat{j}$

⑧ $\vec{a} = -3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}, \vec{b} = -2\hat{i} + 8\hat{k}$

⑨ $\vec{a} = \langle 4, 3 \rangle, \vec{b} = \langle 9, -2 \rangle$

⑤ اعتماداً على المعلومات المعطاة في الشكل المجاور، أثبت أن $BEDC$ متوازي أضلاع.



لا تحمل نفسك أكثر من يومك، كُذها خطوة خطوة.



15) أجد إحداثيات تقاطع للمستقيمين

$$\vec{r} = \langle 4, 4, -7 \rangle + u\langle -1, 3, 1 \rangle$$

$$\vec{r} = \langle -2, 2, -1 \rangle + t\langle 1, 2, -1 \rangle$$

يمر المستقيم l_1 بالنقطتين: F, E ،
ويمر المستقيم l_2 بالنقطتين: H, G .
أحدد إن كان هذان المستقيمان
متوازيين، أو متخالفين، أو
متقاطعين، ثم أجد إحداثيات نقطة
التقاطع إذا كانا متقاطعين في كل
مما يأتي:

$$16) E(3, -5, -7), F(-11, 9, 14), \\ G(8, -1, -8), H(2, 5, 1)$$

$$17) E(3, 7, -9), F(2, -4, 3), \\ G(24, 14, -29), H(3, -21, 20)$$

$$10) \vec{a} = \langle 0, -1, 3 \rangle, \vec{b} = \langle 10, 3, -6 \rangle$$

أجد معادلة متجهة للمستقيم
المر بالنقطتين في كل مما
يأتي:

$$11) (10, 3, -6), (0, -1, 3)$$

$$12) (11, -6, 9), (1, 4, 29)$$

$$13) (-30, -6, 30), (-26, -12, 23)$$

$$14) (-2, 9, 1), (10, 5, -7)$$

②٣ إذا كان: $\vec{m} = \langle 1, -2, 3 \rangle$ ، وكان المتجه: $\vec{n} = \langle -5, 4, a \rangle$ ، فأجد قيمة كل $3\vec{n} + b\vec{m}$ المتجه: $\langle 3, -3, 5 \rangle$ ، من a, b .

يمر المستقيم l بالنقطتين:
: $B(10, 5, -7)$ و $A(-2, 9, 1)$

⑱ أكتب معادلة متجهة للمستقيم l .

⑲ أبين أن النقطة $(19, 2, -13)$ تقع على المستقيم l .

⑳ إذا كان: $\vec{v} = a \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ c \end{pmatrix}$ ، فأجد قيمة كل من: a, b, c ، علماً بأن اتجاه \vec{v} في اتجاه محور y الموجب، و $|\vec{v}| = 34$.

㉑ أجد قيمة a إذا كانت النقطة $(1, a, -1)$ تقع على المستقيم l .

متجهات الموقع للنقاط A, B, C الواقعة على مستقيم واحد هي: $\vec{a} = 2\hat{i} + p\hat{j} + q\hat{k}$ ، $\vec{b} = -4\hat{i} + 13\hat{j} - \hat{k}$ ، $\vec{c} = 14\hat{i} + \hat{j} + 5\hat{k}$ على الترتيب:

㉒ أجد قيمة كل من c, b إذا كانت النقطة $(-8, b, c)$ تقع على المستقيم l .

㉓ أجد قيمة p .

㉔ أجد نقطة تقع على المستقيم l ، وتقع أيضاً في المستوى xz .

26 أجد قيمة q .

31 أجد معادلة متجهة للمستقيم l_2 .

27 أجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم المار بالنقطتين: B و A مع المستوى yz .

إذا كانت: $A(-1, -2, 1), B(-3, 4, -5)$,

$C(0, -2, 4)$ ، فأجب عن السؤالين الآتيين تبعاً:

32 أجد إحداثيات النقطة M التي هي نقطة منتصف \overline{AB} .

28 أجد طول \overline{AC} في صورة: $a\sqrt{14}$ ، حيث a عدد صحيح.

33 إذا وقعت النقطة N على القطعة المستقيمة \overline{BC} ، وكان: $|\overline{BN}| = 2|\overline{NC}|$ ، فأجد معادلة متجهة للمستقيم المار بالنقطتين N, M .

29 أجد معادلة المستقيم المار بهاتين النقطتين، ثم أجد معادلة متجهة لهذا المستقيم، وأقارن بين المعادلتين.

34 يمر المستقيم l_1 بالنقطتين: $P(-5, 2, 4)$

ويمر المستقيم l_2 بالنقطتين: $Q(-2, -3, 3)$ و $R(0, -8, -1)$ و $S(12, -23, a)$. إذا كان المستقيم l_1 والمستقيم l_2 متقاطعين، فما قيمة a ؟ وما إحداثيات نقطة تقاطعهما؟

إذا كان المستقيم l_1 يمر بالنقطة $A(-3, -1, 12)$ والنقطة $B(-2, 0, 11)$ ، وكان المستقيم l_2 يوازي المستقيم l_1 ، ويمر بالنقطة $C(11, 9, 12)$ ، فأجب عن السؤالين الآتيين تبعاً:

30 أجد معادلة متجهة للمستقيم l_1 .

مهارات التفكير العليا:



37 تحدي

يمر المستقيم l_1 بالنقطة Q التي متجه الموقع لها هو $\vec{q} = \langle -6, 14, -19 \rangle$ ، ويمر أيضاً بالنقطة S التي متجه الموقع لها هو $\vec{s} = \langle -4, 6, -3 \rangle$ ، ويمر المستقيم l_2 بالنقطة $T(1, 9, 9)$ ، ويوازي المستقيم: $\vec{r} = \langle 0, -6, 1 \rangle + t\langle 4, 7, 4 \rangle$. إذا تقاطع المستقيم l_1 والمستقيم l_2 في النقطة U ، فأثبت أن المثلث STU متطابق الضلعين.



35 أقمار صناعية: مر القمر الصناعي S_1 بموقعين، هما:

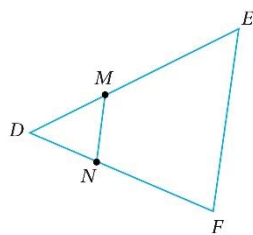
و مر القمر الصناعي S_2 بموقعين، هما: $A(30, -75, 90)$ ، $B(100, 65, 220)$ ، $C(-20, 45, 200)$ ، $D(120, 85, 160)$. أوجد العلاقة بين المستقيم \overline{AB} والمستقيم \overline{CD} من معادليهما.

36 أحل المسألة الواردة في بداية الدرس.

تبرير:

في الشكل المجاور،

$\overline{DE} = 12\vec{a}$ ، $\overline{DF} = 8\vec{b}$ ، والنقطة M تقسم DE بنسبة 2 : 1، والنقطة N تقسم DF بنسبة 2 : 1



38 أثبت أن: $FEMN$ شبه منحرف.

39 إذا كانت مساحة المثلث DEF تساوي 72 وحدة مربعة، فأجد مساحة $FEMN$.

من يلتزم حين لا أحد يراه، ينجح حين يراه الجميع.

كتاب التمارين

أبين إذا كان الشكل الرباعي $ABCD$ في الحالتين الآتيتين متوازي أضلاع أم لا، ثم أبرر إجابتي:

① $A(3, -2, 1), B(-4, 0, 8),$
 $C(-6, 5, 5), D(8, 1, -9)$

② $A(12, 5, -8), B(6, 2, -10),$
 $C(-8, 1, 13), D(-2, 4, 15)$

③ إذا كانت: $A(2, 3, 1), B(6, 5, 4),$
وكان $ABCD$ متوازي أضلاع، فما
إحداثيات D ؟

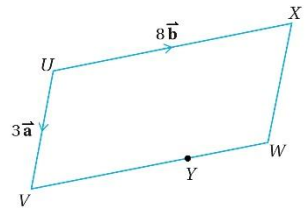
④٠ تحدّ:

أجد جميع النقاط على المستقيم:

$\vec{r} = \langle 3, -2, -6 \rangle + t\langle 1, 2, 3 \rangle$ التي تبعد 29 وحدة عن نقطة الأصل.

④١ تحدّ:

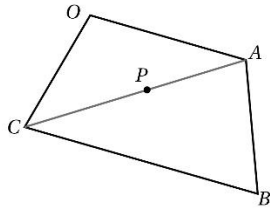
يمثل الشكل المجاور متوازي الأضلاع $UVWX$. إذا كان: $\vec{UV} = 3\vec{a}, \vec{UX} = 8\vec{b}$ وكانت النقطة Y تقع بين W, V ، حيث: $WY = 3YW$ ، والنقطة Z تقع على المستقيم XW ، حيث: $\vec{XZ} = \frac{4}{3}\vec{XW}$ ، فأثبت أن Z, Y, U تقع على استقامة واحدة.



في الشكل الرباعي $OABC$ المجاور،

$$\vec{CB} = 12\vec{a}, \vec{OC} = 7\vec{c}, \vec{OA} = 8\vec{a}$$

تقسم \vec{CA} بنسبة 2 : 3



7 أجد المتجه \vec{OP} بدلالة \vec{a} و \vec{c}

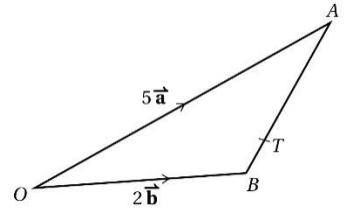
8 أثبت أن النقاط O, P, B تقع على استقامة واحدة.

9 أجد النسبة: $OP : PB$

10 أجد معادلة متجهة للمستقيم الذي يوازي المتجه: $\vec{v} = 4\hat{j} - 2\hat{k}$ ، ويمر بالنقطة A التي متجه موقعها هو: $2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$

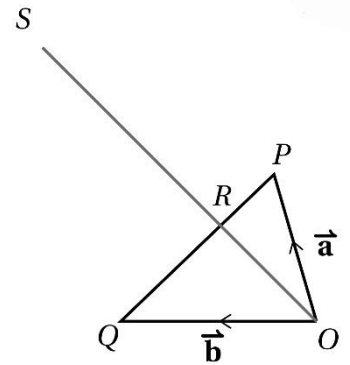
4 في الشكل المجاور، مثلث، فيه:

والنقطة T تقع على الضلع AB ، حيث: $AT : TB = 5 : 1$ ، أبين أن \vec{OT} يوازي $2\vec{b} + \vec{a}$



في الشكل المجاور، مثلث، فيه:

$$\vec{OQ} = \vec{b}, \vec{OP} = \vec{a}, \vec{OS} = 3\vec{OR}, \vec{RQ} = 2\vec{PR}$$



5 أبين أن: $\vec{OS} = 2\vec{a} + \vec{b}$

6 أضيفت النقطة T إلى الشكل، حيث: $\vec{OT} = -\vec{b}$ أثبت أن النقاط S, P, T تقع على استقامة واحدة.

17 إذا وقعت النقطة $(1, b, c)$ على المستقيم l ، فأجد قيمة كل من c و b .

18 ما إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم l مع المستوى xyz ؟

19 إذا كانت: $\vec{r} = \langle 3, 2, 1 \rangle + t\langle 4, a, -12 \rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_1 ، وكانت: $\vec{r} = \langle -2, 4, 3 \rangle + u\langle 3, -2, -9 \rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_2 ، فأجد قيمة a التي تجعل $l_1 \parallel l_2$.

يمر المستقيم l بالنقطتين: $U(p, -3, -1)$ ، و $V(2, 5, -3)$ ، وتقع النقطة $(7, 1, q)$ على l :

20 أجد قيمة p .

21 أكتب معادلة متجهة للمستقيم l .

22 أجد قيمة q .

11 أجد معادلة متجهة للمستقيم الذي يوازي المتجه: $\vec{v} = \langle -4, 5, 8 \rangle$ ، ويمر بالنقطة A التي متجه موقعها هو: $\langle 2, -7, 11 \rangle$.

أجد معادلة متجهة للمستقيم المار بالنقطتين في كل مما يأتي:

12 $(1, -7), (6, 19)$

13 $(-5, 4, 15), (7, 13, -8)$

14 $(5, 22, -8), (13, 10, 3)$

15 $(0, 2, -5), (9, 4, 6)$

إذا كانت: $\vec{r} = \langle -5, 8, 4 \rangle + t\langle 3, -2, 9 \rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l ، فأجب عن الاسئلة الثلاثة الآتية تباعاً:

16 هل تقع النقطة $(3, 7, 11)$ على المستقيم l ؟ أبرر إجابتي.

النجاح في التوجيهي يحتاج التزاماً يومياً، حتى في الأيام التي لا تشمر فيها بأي دافع.

26) يمر المستقيم l بالنقطتين: $A(2, 1, 3)$ و $B(5, -2, 1)$ ، إذا وقعت النقطة C على المستقيم l ، وكان $AC = 3CB$ ، فأجد جميع إحداثيات النقطة C الممكنة.

27) أبين أن المستقيمات التي معادلاتها المتجهة

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ هي}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

تكون مثلًا، ثم أجد أطوال أضعافه.

23) إذا كانت $A(3, -2, 4)$ ، وكانت $B(6, 0, 3)$ ، وكانت $\vec{r} = \langle 3, -2, 4 \rangle + \lambda = \langle 1, 2, -1 \rangle$ ، تقع معادلة متجهة للمستقيم l_1 بالنقطة D ، تقع على المستقيم l_1 ، حيث: $\lambda = 2$ ، فأجد معادلة متجهة للمستقيم l_2 ، الذي يمر بالنقطة D ، ويوازي المستقيم \vec{AB} .

أحدد إن كان المستقيمان: l_1 و l_2 متوازيين، أو متخالفين، أو متقاطعين، ثم أجد إحداثيات نقطة التقاطع إذا كانا متقاطعين في كل ما يأتي:

24) مرور المستقيم l_1 بالنقطتين: $(5, 2, 1)$ و $(4, 3, 3)$ ، ومرور المستقيم l_2 بالنقطتين: $(4, 1, 1)$ و $(5, 1, 0)$.

25) مرور المستقيم l_1 بالنقطتين: $(5, 3, 1)$ و $(3, 1, -2)$ ، ومرور المستقيم l_2 بالنقطتين: $(11, 7, -3)$ و $(9, 6, -2)$.

النجاح في التوجيهي يحتاج التزامًا يوميًا، حتى في الأيام التي لا تشعر فيها بأي دافع.

الدرس الثالث: الضرب القياسي - Scalar Product



مفهوم أساسي الضرب القياسي في الفضاء

إذا كان: $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, $\vec{w} = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$ فإن:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$



أجد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كل مما يأتي:

مثال

$$\textcircled{1} \vec{v} = 5\hat{i} + 4\hat{j} + 8\hat{k}, \vec{w} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$$

$$\textcircled{2} \vec{a} = \langle 4, -6, 5 \rangle, \vec{b} = \langle 3, 7, 2 \rangle$$

أتحقق من فهمي:



أجد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كل مما

يأتي:

$$\textcircled{a} \vec{v} = \langle 4, 8, -3 \rangle, \vec{w} = \langle -3, 7, 2 \rangle$$

$$\textcircled{b} \vec{m} = -2\hat{i} + 5\hat{j} - \hat{k},$$

$$\vec{n} = -12\hat{i} + 6\hat{j} - 8\hat{k}$$



مسألة اليوم: أطلق

صاروخ من النقطة

(1,2,1)، ثم وصل بعد

ثانيتين إلى النقطة

(9,13,21). وفي الوقت نفسه، أطلق صاروخ آخر

من النقطة (4, -3, 2)، ووصل بعد ثانيتين إلى

النقطة (14,1,18). ما قياس الزاوية بين مساري

الصاروخين؟

الضرب القياسي للمتجهات في الفضاء

درستُ في الصف العاشر موضوع الضرب القياسي

للمتجهات في المستوى الإحداثي؛ وهو عملية

جبرية بين متجهين، تنتج منها كمية قياسية.

ويُرمز إليها بالرمز: $\vec{v} \cdot \vec{w}$ وتُقرأ:

$$\vec{v} \cdot \vec{w}$$

إذا كان: $\vec{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ وكان: $\vec{w} = \langle w_1, w_2 \rangle$

فإن:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2$$

يمكن أيضاً إيجاد الضرب القياسي لمتجهين في

الفضاء بطريقة مشابهة لطريقة إيجاده للمتجهين

في المستوى.

أتعلم

لأي ثلاثة متجهات: $\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}$ ، وأي عدد حقيقي c ، فإن:

$$- \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$$

$$- \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$- c(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (c\vec{u}) \cdot \vec{v}$$

أتحقق من فهمي:



أجد قياس الزاوية θ

a) $\vec{u} = -3\hat{i} + 5\hat{j} - 4\hat{k}, \vec{w} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$

b) $\vec{u} = \langle 2, -10, 6 \rangle, \vec{w} = \langle -3, 15, -9 \rangle$

أتعلم

إذا تقاطع مستقيمان غير متعامدين، فإنه ينتج من تقاطعهما زاويتان حادتان ومتقابلتان بالرأس، وزاويتان منفرجتان ومتقابلتان بالرأس. ويمكن إيجاد قياس الزاوية الحادة بينهما بطرح الزاوية المنفرجة من 180° .

الزاوية بين مستقيمين في الفضاء

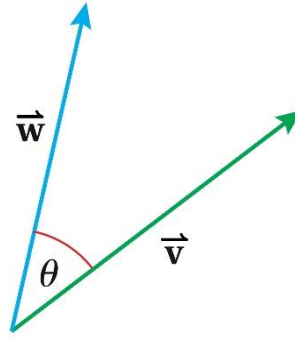
تعلمت في الدرس السابق أن اتجاه المستقيم في الفضاء يحدده أي متجه يوازيه؛ لذا يمكن إيجاد قياس الزاوية بين مستقيمين في الفضاء عن طريق إيجاد الزاوية بين اتجاهيهما باستعمال الضرب القياسي للمتجهات.

كذلك يمكن إيجاد الزاوية بين المستقيمين في الفضاء حتى لو كانا متخالفين. فالمستقيم l والمستقيم m في الشكل الآتي متخالفان، ولكن يُمكن إيجاد الزاوية بينهما عن طريق إيجاد الزاوية

أتعلم

الزاوية بين متجهين هي الزاوية الصغرى المحصورة بينهما عند رسمهما بدءًا بالنقطة نفسها؛ أي إن:
 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$

الزاوية بين متجهين في الفضاء



لإيجاد قياس الزاوية بين متجهين، فإنها ترسم بحيث يكون للمتجهين نقطة البداية نفسها كما في الشكل المجاور.

وكما هو الحال بالنسبة إلى المتجهات في المستوى الإحداثي، فإنه يمكن عن طريق الضرب القياسي إيجاد قياس الزاوية θ بين المتجهين غير الصفرين: \vec{v} و \vec{w} في الفضاء، وذلك باستعمال العلاقة: $\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| |\vec{w}| \cos \theta$ التي يمكن إعادة كتابتها باستعمال تعريف معكوس جيب تمام الزاوية على النحو الآتي:

مفهوم أساسي قياس الزاوية بين متجهين

إذا كان \vec{w}, \vec{v} متجهين غير صفرين، فإنه يمكن إيجاد قياس الزاوية بينهما θ باستعمال الصيغة الآتية:

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| |\vec{w}|} \right)$$



إذا كان: $\vec{v} = \langle 5, -2, 1 \rangle$ وكان:

$\vec{w} = \langle -3, 1, 4 \rangle$ فأجد قياس الزاوية

أتحقق من فهمي:



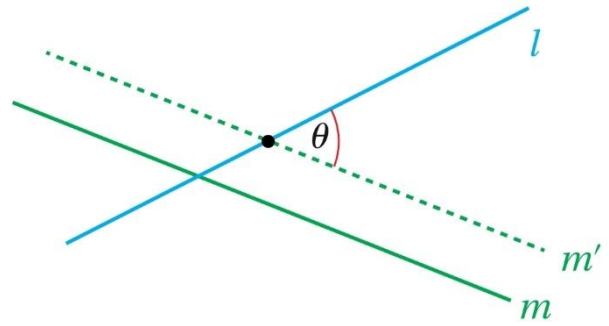
إذا كانت: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ معادلة

متجهة للمستقيم l_1 ، وكانت:

معادلة متجهة $\vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

للمستقيم l_2 ، فأجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيم l_1 والمستقيم l_2 الى اقرب درجة.

بين اتجاه المستقيم l واتجاه المستقيم m' الذي يعد إزاحة للمستقيم m .



إيجاد مساحة المثلث باستعمال المتجهات

إذا علمت إحداثيات رؤوس مثلث في الفضاء، فيمكنني استعمال الضرب القياسي للمتجهات في إيجاد مساحته.

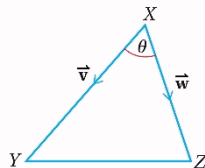
أحدد أولاً متجهين يمثلان ضلعين في المثلث، لهما نقطة البداية نفسها، ثم أجد طولي هذين الضلعين باستعمال صيغة مقدار المتجه، ثم أجد قياس الزاوية بينهما، عندئذ يمكنني إيجاد مساحة المثلث الذي علم فيه طولاً ضلعين، وقياس الزاوية المحصورة بينهما باستعمال قانون الجيب كما تعلمت في الصف العاشر.

أتعلم

مساحة المثلث XYZ هي:

$$\text{Area} = \frac{1}{2} |\overline{XY}| |\overline{XZ}| \sin \theta$$

$$= \frac{1}{2} |\vec{v}| |\vec{w}| \sin \theta$$



مثال إذا كانت: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

معادلة متجهة للمستقيم l_1 ، وكانت:

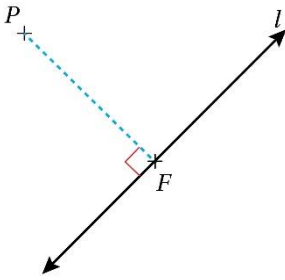
معادلة متجهة للمستقيم l_2 ، فأجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيم l_1 والمستقيم l_2 الى اقرب عشر درجة.

المستقيم l_2 الى اقرب عشر درجة.

اتذكر

البعد بين مستقيم ونقطة لا تقع عليه هو طول القطعة المستقيمة العمودية على المستقيم من تلك النقطة، التي تمثل أقصر مسافة بين النقطة والمستقيم.

مسقط العمود على مستقيم من نقطة خارجه



بين الشكل المجاور المستقيم l ، ونقطة لا تقع عليه هي P . عند رسم مستقيم عمودي على l ، يمر بالنقطة P ، فإن نقطة تقاطع هذا المستقيم مع l تُسمى

مسقط العمود (foot of the perpendicular) من النقطة P على المستقيم l ، وهي النقطة F في الشكل المجاور. يمثل طول العمود \overline{PF} البعد بين النقطة P والمستقيم l . ويمكن استعمال حقيقة أن ناتج الضرب القياسي للمتجهين المتعامدين يساوي صفرًا؛ لتحديد مسقط العمود من النقطة P على المستقيم l (إحداثيات النقطة F).

يمكن استعمال فكرة مسقط العمود لإيجاد أقصر مسافة في الفضاء بين أي مستقيم علمت معادلته المتجهة ونقطة لا تقع عليه علمت إحداثياتها.

مثال

إذا كانت:

$$\vec{r} = 28\hat{i} - 10\hat{j} - 4\hat{k} + t(8\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k})$$

معادلة متجهة للمستقيم l ، والنقطة $P(3, -4, 2)$ غير واقعة على المستقيم l ، فأجب عن السؤالين الآتيين:

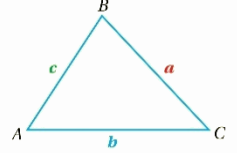
① أدد مسقط العمود من النقطة P على المستقيم l .

مراجعة المفهوم إيجاد مساحة المثلث باستعمال قانون الجيب

مساحة المثلث ABC تساوي نصف ناتج ضرب طولي أيّ ضلعين فيه مضروباً في جيب الزاوية المحصورة بينهما:

$$Area = \frac{1}{2} bc \sin A, Area = \frac{1}{2} ac \sin B$$

$$, Area = \frac{1}{2} ab \sin C$$



مثال

أجد مساحة المثلث ABC الذي إحداثيات رؤوسه هي:

$$A(5, 6, -2), B(2, -2, 1), C(2, -3, 6)$$

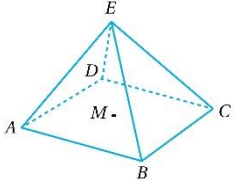


أنتحقق من فهمي:



أجد مساحة المثلث EFG الذي إحداثيات رؤوسه هي:

$$E(2, 1, -1), F(5, 1, 7), G(6, -3, 1)$$



مثال
يظهر في الشكل
المجاور الهرم $ABCDE$ الذي
قاعدته المربع $ABCD$ ،
وإحداثيات رؤوسه هي:

$A(1, 1, -1), B(9, -1, -3), C(9, -7, 3),$
 M ومركزه النقطة $D(1, -5, 5), E(8, 3, 7)$

① أجد $m\angle AEC$ إلى أقرب عُشر درجة.

② أبين أن: $m\angle AME = 90^\circ$.



اتذكر

حجم الهرم يساوي ثلث مساحة قاعدته في ارتفاعه.

أتحقق من فهمي:



① أجد قياس $\angle EDB$ في الهرم المبين في المثال
السابق.

② أجد حجم هذا الهرم.

② أجد البعد بين النقطة P والمستقيم l .

أتحقق من فهمي:



إذا كانت:

$\vec{r} = 16\hat{i} + 11\hat{j} - 3\hat{k} + t(5\hat{i} + 7\hat{j} - 3\hat{k})$
معادلة متجهة للمستقيم l ، والنقطة
 $P(2, 0, \frac{10}{3})$ غير واقعة على المستقيم l ،
فأجب عن السؤالين الآتيين:

① أجد مسقط العمود من النقطة P على
المستقيم l .

② أجد البعد بين النقطة P والمستقيماً.



**استعمال المتجهات لتحديد قياسات في
أشكال ثلاثية الأبعاد**

يمكن استعمال المتجهات لتحديد قياسات بعض
الزوايا والأطوال لأضلاع تقع في مستويات مائلة
ضمن أشكال ثلاثية البعد، علمت إحداثيات
رؤوسها.





أدرب وأحل المسائل:

أجد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كل مما يأتي:

$$\textcircled{6} \vec{v} = \langle 3, -2, 9 \rangle, \vec{w} = \langle 5, 3, -4 \rangle$$



$\textcircled{7}$ إذا كانت $A(3, 5, -4)$ و $B(7, 4, -3)$ و O نقطة الأصل، فأجد $m \angle OAB$ إلى أقرب درجة.



$\textcircled{8}$ يمر المستقيم l_1 بالنقطتين: $(2, -1, 4)$ ، $(-3, 5, 7)$ ويمر المستقيم l_2 بالنقطتين: $(1, 2, -1)$ و $(6, -5, 3)$ أجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيم l_2 والمستقيم l_1 إلى أقرب عُشر درجة.



$\textcircled{9}$ إذا كان المستقيم الذي له المعادلة المتجهة: $\vec{r} = \langle 1, 4, -5 \rangle + \lambda \langle -6, q + 5, 3 \rangle$ والمستقيم الذي له المعادلة المتجهة: $\vec{r} = \langle 1, 4, -5 \rangle + \mu \langle 5, q - 6, -4 \rangle$ متعامدين، فما القيم الممكنة للثابت q ؟

$$\textcircled{1} \vec{u} = 5\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}, \vec{v} = 7\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\textcircled{2} \vec{u} = 4\hat{i} - 8\hat{j} - 3\hat{k}, \vec{v} = 12\hat{i} + 9\hat{j} - 8\hat{k}$$

$$\textcircled{3} \vec{u} = \langle -5, 9, 17 \rangle, \vec{v} = \langle 4, 6, -2 \rangle$$

$$\textcircled{4} \vec{u} = \langle 1, -4, 12 \rangle, \vec{v} = \langle 3, 10, -5 \rangle$$



أجد قياس الزاوية θ بين المتجهين إلى أقرب عُشر درجة في كل مما يأتي:

$$\textcircled{5} \vec{m} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}, \vec{n} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$$



14 حزام ناقل: يمثل المتجه:

$$\vec{F} = 5\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$$

القوة التي يولدها حزام

ناقل لتحريك حقيبة في مسار مستقيم، من النقطة $(1, 1, 1)$ إلى النقطة $(9, 4, 7)$. أجد مقدار الشغل الذي تبذله القوة F ، علمًا بأن القوة بالنيوتن N والمسافة بالمتري m ، ومقدار الشغل (W) المبذول بوحدة الجول (J) يساوي ناتج الضرب القياسي لمتجه القوة في متجه الإزاحة؛ أي $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$.



15 إذا كانت النقطة $R(27, -17, -1)$ والنقطة $S(11, -9, 11)$ تقعان على المستقيم l ، وكانت النقطة Q تقع على المستقيم l ، حيث \overline{OQ} عمودي على l ، فأجد متجه الموقع للنقطة Q .



إذا كانت متجهات مواقع النقاط A, B, D هي: $\langle -4, 13, 22 \rangle, \langle 4, 17, 14 \rangle, \langle 2, -29, 7 \rangle$ على الترتيب، فأجيب عن الأسئلة الأربعة الآتية تباعًا:

16 أثبت أن: $\overline{AB} \perp \overline{AD}$.

إذا كانت: $\vec{r} = 2\hat{j} - 3\hat{k} + t(-\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k})$ معدلة متجهة للمستقيم l ، والنقطة $P(-2, 26, 5)$ غير واقعة على المستقيم l ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

10 أجد مسقط العمود من النقطة P على المستقيم l .

11 أجد البعد بين النقطة P والمستقيم l .

12 أجد مساحة المثلث ABC ، حيث:

$$\overline{AC} = \langle 9, 1, 4 \rangle, \overline{AB} = \langle 4, 9, 1 \rangle$$



13 أجد مساحة المثلث ABC الذي إحداثيات رؤوسه

$$A(1, 3, 1), B(2, 7, -3), C(4, -5, 2)$$
 هي:

21 أجد البعد بين النقطة T والمستقيم l_3 .

17 أجد متجه موقع النقطة C إذا كان $ABCD$ مستطيلاً.

18 أجد مساحة المستطيل $ABCD$.

19 أجد متجه موقع مركز المستطيل $ABCD$.

إذا كانت: $\vec{r} = \langle 5, 3, 0 \rangle + \lambda \langle -1, 3, 1 \rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l ، وكانت $A(3, -2, 1), B(5, 3, 0)$ ، فأجب عن السؤالين الآتيين تبعاً:

22 أجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيم \overrightarrow{AB} والمستقيم l .

23 تقع النقطة C على المستقيم \overrightarrow{AB} ، حيث: $AB = AC$. أجد إحداثيات النقطة C .

تمثل: $\vec{r} = \langle -5, 7, 1 \rangle + t \langle 3, 1, 4 \rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_1 ، وتمثل:

معادلة متجهة للمستقيم l_2 ، وتمثل:

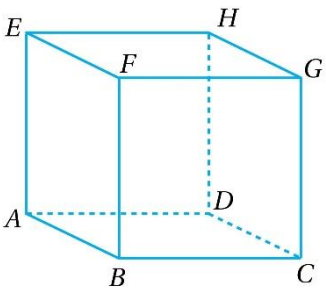
معادلة متجهة للمستقيم l_3 . إذا تقاطع المستقيم l_2 والمستقيم l_1 في النقطة T ، وكانت النقطة F تقع على المستقيم l_3 ، حيث: $\overline{TF} \perp l_3$ ، فأجب عن السؤالين الآتيين تبعاً:

20 أجد إحداثيات النقطة F .

تقع النقطة $A(-7, -4, 9)$ والنقطة $B(8, 5, 3)$ على المستقيم l_1 ، وتقع النقطة $C(6, 11, 7)$ على المستقيم l_2 الذي معادلته:

$$\vec{r} = \langle 6, 11, 7 \rangle + t \langle -1, 3, 2 \rangle$$

24 أبين أن النقطة B تقع على المستقيم l_2 .



يظهر في الشكل المجاور
المكعب $ABCDEFGH$.
إذا كانت إحداثيات رؤوس
هذا المكعب هي:

$$A(5,3,1), B(-6,26,23),$$

$$C(16,47,12), D(27, p, -10)$$

$$E(-17,14, -21), F(-28,36,1), G(-6,58, -10),$$

$$H(5,36, q)$$

تباعاً:

$$\textcircled{30} \text{ أجد قيمة كل من } q, p$$

$$\textcircled{31} \text{ أجد متجه الموقع لنقطة مركز المكعب } ABCDEFGH.$$

$$\textcircled{32} \text{ أجد حجم هذا المكعب.}$$

$$\textcircled{25} \text{ أبين أن المستقيم } l_1 \text{ والمستقيم } l_2 \text{ متعامدان.}$$

$$\textcircled{26} \text{ أجد } m\angle ABC.$$

$$\textcircled{27} \text{ أجد مساحة المثلث } ABC.$$

$$ABCD \text{ هرم ثلاثي. إذا كانت إحداثيات رؤوسه}$$

$$\text{هي: } A(4,3, -1), B(-4,5,2),$$

$$C(6, -1,0), D(10,11,19)$$

الآتيين تبعاً:

$$\textcircled{28} \text{ أجد مساحة المثلث } ABC \text{ في صورة: } a\sqrt{6}.$$

$$\textcircled{29} \text{ أثبت أن: } m\angle AED, \text{ حيث } E(1, 2, 1).$$

إرشاد

المعين هو متوازي أضلاع جميع أضلاعه متطابقة.

38) أحل المسألة الواردة في بداية الدرس.

إذا كانت $C(8, -4, -6), B(5, -2, 0), A(3, 1, -6)$ فأجيب عن الأسئلة الخمسة الآتية تباعاً:

33) أبين أن: $\vec{AC} = n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ حيث n عدد صحيح.

34) أبين أن قياس الزاوية ACB هو $\cos^{-1} \frac{5\sqrt{2}}{14}$.

35) اكتب معادلة متجهة للمستقيم \vec{AC} .

36) إذا كانت $D(6, -1, p)$ وعلم أن \vec{AC}, \vec{BD} متقاطعان، فما قيمة p ؟

37) أبين أن الشكل $ABCD$ معين، ثم أجد طول ضلعه.

مهارات التفكير العليا!



39) تبرير:

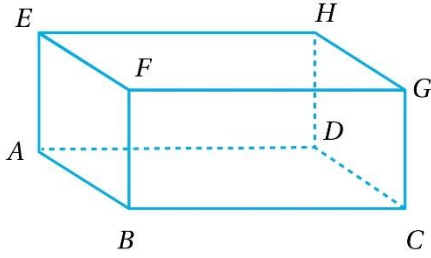
إذا كانت $B(1, -5, 9), A(3, -2, 4)$ وكانت النقطة D تقع على المستقيم المار بالنقطة A والنقطة B ، وكانت الزاوية CDA قائمة، فما إحداثيات النقطة D ؟ ابرر إجابتي.

تحدّ: رسم متوازي المستطيلات الآتي باستخدام برمجية حاسوبية تعتمد في قياساتها على المتجهات، فكانت كالآتي:

$$\overline{AB} = (2\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k}),$$

$$\overline{AD} = (-10\hat{i} + 10\hat{j} - 5\hat{k}),$$

$$\overline{AE} = (-6\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k})$$



44 إذا كانت $B(8, 3, -2)$ ، فأجد إحداثيات النقطة H .

45 أجد قياس الزاوية GAC مقرباً على أقرب عشر درجة.

46 إذا كان X نقطة منتصف الضلع \overline{EF} ، فأجد جيب تمام الزاوية DXC .

تحدّ: إذا كانت: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_1 ، وكانت:

معادلة متجهة للمستقيم l_2 ، وتقاطع هذان المستقيمان في النقطة P ، وكانت النقطة Q تقع على المستقيم l_1 ، حيث: $t = 3$ ، والنقطة R تقع على المستقيم l_2 ، حيث: $u > 3$ ، فأجيب عن الاسئلة الأربعة الآتية تباعاً:

40 أجد إحداثيات كل من النقطة P ، والنقطة Q .

41 أجد إحداثيات النقطة R .

42 إذا كان $m\angle RPQ = \theta$ ، فأبين أن: $\cos \theta = -\frac{3}{94}$

43 أبين أن مساحة المثلث PQR هي $2\sqrt{8827}$ وحدة مربعة.

أجد قياس الزاوية θ بين المتجهين إلى أقرب عشر درجة في كل مما يأتي:

$$\textcircled{5} \vec{a} = 5\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}, \vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\textcircled{6} \vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}, \vec{b} = -\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$$

$\textcircled{7}$ إذا كان المتجه: $\vec{a} = \lambda\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ والمتجه: $\vec{b} = \lambda\hat{i} + 4\hat{j} + \lambda\hat{k}$ متعامدين، فما قيمة (قيم) λ ؟

$\textcircled{8}$ إذا كانت: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ معادلة متجة للمستقيم l_1 ، وكانت: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -5 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_2 ، فأجد قياس الزاوية الحادة بين هذين المستقيمين إلى أقرب عشر درجة.

كتاب التمارين

أجد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كل مما يأتي:

$$\textcircled{1} \vec{u} = \langle 4, 5, -3 \rangle, \vec{v} = \langle -2, 3, -7 \rangle$$

$$\textcircled{2} \vec{e} = \begin{pmatrix} -13 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{3} \vec{m} = 7\hat{i} + 4\hat{j} - 9\hat{k}, \vec{n} = 2\hat{i} - 5\hat{j} + 10\hat{k}$$

$\textcircled{4}$ إذا كان المتجه: $\vec{v} = \langle 6, 5, a \rangle$ يعامد المتجه: $\vec{w} = \langle 15, 24, -7 \rangle$ ، فما قيمة a ؟

إذا مر المستقيم l بالنقطتين:

$F(1, -3, 5), E(-3, 7, 12)$ وكانت النقطة

$G(0, -6, 4)$ لا تقع على المستقيم l ، فأجد كلاهما

يأتي:

⑫ مسقط العمود من النقطة G على المستقيم l .

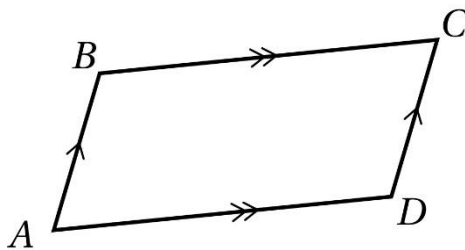
⑬ البعد بين النقطة G والمستقيم l .

⑭ يبين الشكل المجاور متوازي الأضلاع $ABCD$ ،

حيث: $\vec{AC} = 15\hat{i} + 8\hat{j} + 5\hat{k}$

أجد مساحة متوازي

الأضلاع $ABCD$.



⑨ يمر المستقيم l_1 بالنقطتين:

$(-2, 11, 6), (3, -5, 9)$ ويمر المستقيم l_2

بالنقطتين: $(-5, 9, 12), (4, 3, 8)$ أجد قياس

الزاوية الحادة بين هذين المستقيمين إلى أقرب

عشر درجة.

⑩ إذا كان قياس الزاوية بين المتجه: $\langle v, 0, -1 \rangle$

والمتجه: $\langle 2, -1, 0 \rangle$ هو 60° ، فما قيمة v ؟

⑪ إذا كان: $A(3, -2, 6)$ ، وكان: $B(-5, 4, 1)$ ،

فأجد مساحة المثلث AOB ، حيث O نقطة الأصل.

إذا كانت: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -19 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ a \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l ، والنقطة $T(-2,5,8)$ تقع خارج المستقيم l ، والنقطة F تقع على المستقيم l ، حيث \overrightarrow{TF} يعامد المستقيم l ، فأجب عن السؤالين الآتيين تبعاً:

18) أبين أن قيمة t التي تعطي النقطة F على المستقيم l هي: $t = \frac{13a+44}{a^2+10}$.

19) إذا كانت $t = 5$ في السؤال السابق، فأجد متجهي الموقع الممكنين للنقطة F .



إذا كانت:

$A(3, -2, 4), B(1, -5, 6), C(-4, 5, -1)$ والمستقيم l يمر بالنقطة A ، وله المعادلة المتجهة: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$ ، فأجب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تبعاً:

20) أبين أن النقطة C تقع على المستقيم l .

إذا كانت: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_1 ، وكانت:

معادلة متجهة للمستقيم l_2 ، والنقطة $A(9, -1, -14)$ تقع على المستقيم l_1 ، والنقطة C تقع على المستقيم l_2 ، فأجب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تبعاً:

15) إذا كان المستقيم l_1 والمستقيم l_2 متعامدين، فأجد قيمة q .

16) إذا كان المستقيم l_1 والمستقيم l_2 متقاطعين، فأجد قيمة p ، وإحداثيات نقطة تقاطعهما.

17) رسمت دائرة مركزها النقطة C ، فقطعت المستقيم l_1 في النقطتين: A, B أجد متجه الموقع للنقطة B .

24) أبين أن المستقيم l_1 والمستقيم l_2 يتقاطعان في النقطة $(-2, 7, 10)$.

21) أجد معادلة متجهة للمستقيم المار بالنقطة A والنقطة B .

22) إذا وقعت النقطة D على المستقيم المار بالنقطة A والنقطة B ، بحيث كانت الزاوية CDA قائمة، فأجد إحداثيات النقطة D .

إذا كانت $\vec{r} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_1 ، وكانت $\vec{r} = \begin{pmatrix} -9 \\ 21 \\ -4 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_2 ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تبعاً:

23) أبين أن المستقيم l_1 والمستقيم l_2 متعامدان

عندما تشعر أن الطريق طويل، تذكر كم قطعت منه بالفعل، وكم بقي أقل مما مضى.

اختبار نهاية الوحدة



5 إذا كان: $\vec{v} = \langle 2, -2, 5 \rangle$ وكان:

$\vec{w} = \langle -3, 4, 6 \rangle$ فإن $3\vec{v} - 2\vec{w}$ يساوي:

- a) $\langle 0, 2, 3 \rangle$ b) $\langle 12, -14, 3 \rangle$
c) $\langle 13, -16, -8 \rangle$ d) $\langle -13, 16, 8 \rangle$

6 إذا كان قياس الزاوية بين \vec{a} , \vec{b} هو 60° ، وكان: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 30$ وكان $|\vec{a}| = 10$ ، فإن مقدار \vec{b} هو:

- a) 3 b) 5
c) 6 d) 24

7 إذا كان: $\vec{u} = \langle -4, 2, a \rangle$ وكان:

$\vec{v} = \langle 2, b, 5 \rangle$ وكان: $\vec{u} \parallel \vec{v}$ ، فإن قيمة a هي:

- a) -10 b) -5
c) -1 d) 5

8 إذا كان المتجه: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ والمتجه:

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ q \end{pmatrix}$ متعامدين، فإن قيمة q هي:

- a) 0 b) 8 c) 10 d) 18



أختار رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1 إذا كانت $A(-3, 4, 9)$, $B(5, -3, 3)$ فإن الصورة الإحداثية للمتجه \overrightarrow{AB} هي:

- a) $\langle -2, 2, 12 \rangle$ b) $\langle 8, -6, -6 \rangle$
c) $\langle -1, 1, 6 \rangle$ d) $\langle -8, 6, -6 \rangle$

2 إذا كانت: $\vec{v} = \langle 2, c, -5 \rangle$ وكان: $|\vec{v}| = 3\sqrt{5}$ فإن c تساوي:

- a) 4 b) -3,5
c) 15 d) -4,4

3 إذا كانت النقاط P, Q, R تقع على استقامة واحدة، حيث: $PQ:QR = 3:1$ ، فإن التعبير عن المتجه \overrightarrow{RQ} بدلالة \vec{a} هو:



- a) $\frac{1}{3}\vec{a}$ b) $\frac{1}{4}\vec{a}$
c) $-\frac{1}{3}\vec{a}$ d) $-\frac{1}{4}\vec{a}$

4 النقطة الواقعة على المستقيم الذي له المعادلة المتجهة: $\vec{r} = \langle 4, -2, 5 \rangle + t\langle -2, 1, 3 \rangle$ والإحداثي y لها 10 هي:

- a) $(18, 10, 28)$ b) $(28, 10, 35)$
c) $(-8, 10, 20)$ d) $(-20, 10, 41)$

إذا كانت: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_2 ، وكانت:

معادلة متجهة للمستقيم l_2 ، فأجب عن السؤالين الآتيين تبعاً:

12) أجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمين: l_1, l_2 .

13) أجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين: l_1, l_2 .

إذا كانت $A(1,4,-5), B(3,0,2), C(-4,1,3)$ فأجب عن الأسئلة الأربعة الآتية تبعاً:

14) أكتب معادلة متجهة للمستقيم \vec{AB} .

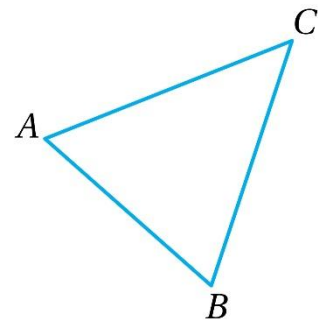
15) أكتب معادلة متجهة للمستقيم \vec{AC} .

9) في المثلث المجاور، إذا كان:

$$\vec{AB} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\vec{BC} = -2\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$$

فأجد قياس الزاوية ABC إلى أقرب عشر درجة.



10) إذا وقعت النقاط: $E(2,0,4), F(h,5,1), G(3,10,k)$ على مستقيم واحد، فما قيمة كل من h, k ؟

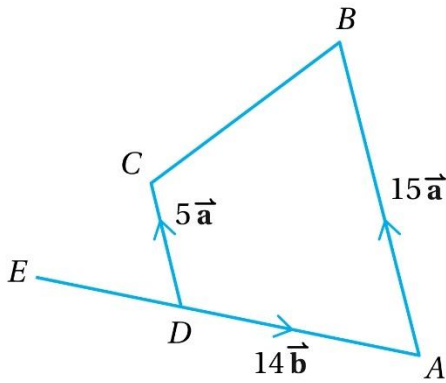
11) إذا كانت $A(3,-2,4), B(1,-5,6), C(-4,5,-1)$ وكانت النقطة D تقع على المستقيم المار بالنقطة A والنقطة B ، وكانت الزاوية CDA قائمة، فأجد إحداثيات النقطة D .

20 $E(-3, -5, 16), F(12, 0, 1),$
 $G(7, 2, 11), H(1, -22, 23)$

16 إذا كان قياس $\angle BAC = \theta$ ، فأثبت أن:
 $\cos \theta = \frac{58}{7\sqrt{138}}$

17 أجد مساحة المثلث ABC .

21 في الشكل الرباعي $ABCD$ الآتي، مد AD على استقامته ليصل إلى النقطة E ، حيث:
 $AD = 2DE$ ، إذا كان: $\vec{DA} = 14\vec{b}$ ، وكان:
 $\vec{DC} = 5\vec{a}$ ، وكان: $\vec{AB} = 15\vec{a}$ ، فأثبت أن
 E, C, B تقع على استقامة واحدة.



18 إذا كانت: $\vec{r} = \langle 3, -25, 13 \rangle + t\langle 4, 5, -1 \rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l ، وكانت النقطة V تقع على المستقيم l ، حيث $l \perp \overline{OV}$ ، فما إحداثيات النقطة V ؟

يمر المستقيم l_1 بالنقطتين: F, E ، ويمر المستقيم l_2 بالنقطتين: H, G ، أحدد إن كان هذان المستقيمان متوازيين، أو متخالفين، أو متقاطعين، ثم أجد إحداثيات نقطة التقاطع إذا كانا متقاطعين في كل ما يأتي:

19 $E(17, 6, 34), F(5, 9, 16),$
 $G(1, 21, -2), H(-13, -14, 19)$