

الوحدة السابعة: الاحتماء والاحتمالات



أستعد لدراسة الوحدة



إيجاد التباديل



أجد قيمة كل مما يأتي:

① $P(10, 9)$

② $P(8, 0)$

③ $P(7, 7)$

④ $P(6, 1)$

⑤ $P(6, 2)$

⑥ $P(9, 2)$

⑦ $P(5, 2)$



إيجاد التوافيق



أجد قيمة كل مما يأتي:

① $\binom{10}{3}$

② $\binom{50}{1}$

③ $\binom{100}{99}$

④ $\binom{1000}{0}$

⑤ $\binom{20}{20}$

⑥ $5!$

⑦ $\binom{7}{3}$

قد تشعر بالتعب واليأس أحياناً، لكن تذكر أن هذا الشعور نفسه هو دليل أنك تمشي في الطريق الصحيح.



إيجاد الوسط الحسابي، والانحراف المعياري، والتباين لمجموعة من المشاهدات



أجد الوسط الحسابي، والانحراف المعياري، والتباين لكل مجموعة مشاهدات مما يأتي:

① 1, 1, 2, 3, 4, 5, 1, -1, -5, 3

② -2, -3, -4, 5, 2, 1, 4, 5

③ 2, 4, 6, 8

إيجاد التوقع، والتباين، والانحراف المعياري



أجد التوقع، والتباين، والانحراف المعياري لكل توزيع احتمالي مما يأتي:

①

x	1	-1
$P(X = x)$	0.4	0.6

②

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	0.2	0.1	0.3	k

③

x	3	-5
$P(X = x)$	0.7	0.3

المتغيرات العشوائية



أجد قيم المتغير العشوائي في كل مما يأتي:

① في تجربة إلقاء قطعة نقد 4 مرات، دل المتغير العشوائي X على عدد مرات ظهور الصورة.

② في تجربة اختيار 5 كرات على التوالي من دون إرجاع من صندوق يحوي 3 كرات صفراء و 4 كرات زرقاء، دل المتغير العشوائي X على عدد الكرات الصفراء المسحوبة.

③ في تجربة إلقاء حجر نرد متمايزين معاً، دل المتغير العشوائي X على الفرق المطلق للعددين الظاهرين على حجري النرد.

④ في تجربة إلقاء قطعة نقد 3 مرات متتالية، دل المتغير العشوائي X على عدد مرات ظهور الصورة مضروباً في عدد مرات ظهور الكتابة:

(a) أجد قيمة المتغير العشوائي X .

(b) أنشئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير X .

لا تقارن بدايتك بنهاية غيرك، فكل مجتهد قصة تعب خاصة به، ونهايتك ستكون كما تستحق.



الدرس الأول : التوزيع الهندسي وتوزيع ذي الحدين



مسألة اليوم :

يتدرب عمر على لعبة الشطرنج للفوز ببطولتها في مواجهة برنامج حاسوبي لهذا الغرض. إذا كان احتمال فوز عمر في كل لعبة هو 0.25، فأجد احتمال أن تكون اللعبة الثالثة هي أول لعبة يفوز بها منذ بدئه التدريب.



أتذكر :

لأي تجربة عشوائية، يكون الحادث (A) والحادث (B) مستقلين إذا كان وقوع أحدهما (أو عدم وقوعه) لا يؤثر في احتمال وقوع (أو عدم وقوع) الآخر.

التجربة الاحتمالية الهندسية

يُطلق على تكرار تجربة بيرنولي عددًا من المرات المستقلة حتى التوصل إلى أول نجاح اسم التجربة الاحتمالية الهندسية (geometric probability experiment).

أتعلم :

بوجه عام، إذا كانت المحاولات مستقلة، فهذا لا يعني بالضرورة ثبات احتمال النجاح في كل محاولة.

تجربة بيرنولي

تجربة بيرنولي (Bernoulli trial) هي تجربة عشوائية لها أحد ناتجين فقط، بحيث يعبر عن أحدهما بالنجاح، ويعبر عن الآخر بالفشل. فمثلاً، تجربة إلقاء قطعة النقد مرة واحدة وملاحظة الوجه الظاهر تمثل تجربة بيرنولي؛ لأن لها أحد ناتجين: صورة، أو كتابة. وفي هذه التجربة، تعد الصورة هي النجاح، والكتابة هي الفشل، أو العكس.

مفهوم أساسي التجربة الاحتمالية الهندسية

- إذا توافرت الشروط الأربعة الآتية في تجربة عشوائية ما، فإنها تعد تجربة احتمالية هندسية:
- اشتمال التجربة على محاولات مستقلة ومتكررة.
- فرز النتائج الممكنة في كل محاولة إلى نجاح أو فشل.
- ثبات احتمال النجاح في كل محاولة.
- التوقف عند أول نجاح.

عندما تفتح الكتاب وأنت متعب، اعلم أنك تصنع فرقاً حقيقياً بينك وبين من استسلم.

المتغير العشوائي الهندسي، وتوزيعه الاحتمالي

تعلمت سابقاً أن المتغير العشوائي هو متغير تعتمد قيمه على نواتج تجربة عشوائية، وأن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي هو اقتران يربط كل قيمة للمتغير العشوائي باحتمال وقوعها في التجربة. في التجربة الاحتمالية الهندسية، إذا دل المتغير العشوائي X على عدد المحاولات وصولاً إلى أول نجاح، فإن X يسمى المتغير العشوائي الهندسي، ويمكن التعبير عنه بالرموز على النحو الآتي: $X \sim Geo(p)$

حيث p احتمال النجاح الثابت في كل محاولة. ومن ثم، فإن التغير X يأخذ القيم الآتية: $1, 2, 3, \dots$ أي إن:

$$x \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

إذن، إذا كان X متغيراً عشوائياً هندسياً، فإنه يمكن إيجاد احتمال أن يأخذ X قيمة بعينها ضمن مجموعة قيمه الممكنة باستعمال الصيغة الآتية:

أتذكر :

يرمز إلى قيم المتغير العشوائي بالرمز x ، ويرمز إلى المتغير العشوائي نفسه بالرمز X .

أتذكر :

إذا كان الحادثان A, B مستقلين، فإن احتمال حدوثهما معاً هو حاصل ضرب احتمالي وقوعهما؛ أي إن:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

مثال 1



أبين إذا كانت التجربة العشوائية تمثل تجربة احتمالية هندسية في كل مما يأتي:

① إلقاء ريان حجر نرد منتظماً بشكل متكرر، ثم التوقف عند ظهور العدد 2.

② سحب هديل 4 كرات على التوالي من دون إرجاع، من صندوق فيه 5 كرات حمراء، و6 كرات خضراء، ثم كتابة عدد الكرات الحمراء المسدوبة.

أتحقق من فهمي:



أبين إذا كانت التجربة العشوائية تمثل تجربة احتمالية هندسية في كل مما يأتي:

(a) إلقاء عبد العزيز قطعة نقد منتظمة 6 مرات، ثم كتابة عدد مرات ظهور الصورة.

(b) إطلاق سامية أسهماً بشكل متكرر نحو هدف، ثم التوقف عند إصابته أول مرة، علماً بأن احتمال إصابته الهدف في كل مرة هو 0.6.

النجاح في التوجيهي لا يحتاج ذكاء خارق، بل يحتاج نفساً طويلاً، وصبراً لا ينقطع، وإيماناً بأن الله لا يضع الجهد.



مفهوم أساسي التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي الهندسي

إذا كان: $X \sim Geo(p)$ ، فإن: $x \in \{1, 2, 3, \dots\}$ ،
يعطى التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X
بالقاعدة الآتية:

$$P(X = x) = p(1 - p)^{x-1}$$

حيث:

x : عدد المحاولات وصولاً إلى أول نجاح.

p : احتمال النجاح في كل محاولة.

أتحقق من فهمي:



يمثل  المجاور
المقسماً إلى 4
الشكل قرصاً
قطاع متطابقة.

إذا دل المتغير العشوائي X على
عدد مرات تدوير مؤشر القرص
حتى يقف عند اللون الأخضر أول
مرة، كلاً مما يأتي:

a) $P(X = 3)$

b) $P(X \leq 4)$

c) احتمال تدوير مؤشر القرص 3 مرات على الأقل
حتى يقف عند اللون الأخضر أول مرة.

مثال 2

اتفقت ليلي وزميلاتها على ألا
تشارك أي منهن في لعبة
حتى ترمي حجر نرد منتظماً
بشكل متكرر، ويظهر العدد 6.
إذا أرادت ليلي المشاركة في
اللعبة، وكان X يمثل عدد مرات
رميها حجر النرد حتى ظهور
العدد 6، فأجد كلاً مما يأتي:



① $P(X = 4)$

② $P(X \leq 3)$

③ احتمال أن ترمي ليلي حجر النرد أكثر من 4 مرات
لتشارك في اللعبة.

الدراسة في أيام التوجيهي ليست عبئاً، بل استثمار حقيقي لعمر
كامل قادم.

مثال 3

صحافة: يريد مراسل صحفي إجراء مقابلات مع عدد من زوار مركز تجاري، وسؤالهم عن مشاهدة آخر مباراة لكرة القدم، ثم التوقف عن ذلك عند مقابلته أول شخص شاهد المباراة. إذا كان لدى المراسل إحصائية تشير إلى أن ما نسبته 5% من سكان المدينة قد شاهدوا المباراة، فكم زائراً يتوقع أن يسأله المراسل قبل مقابلته شخصاً شاهد المباراة؟



أتتحقق من فهمي:



تسويق: أعلنت إحدى شركات تصنيع حبوب الفطور للأطفال عن وجود لعبة مجانية في بعض علب الحبوب الجديدة التي تنتجها الشركة. إذا احتوت علبة من كل 4 علب على لعبة، ودل المتغير العشوائي X على عدد العلب التي سيفتحها الطفل حتى يجد لعبة، فكم علبة يتوقع أن يفتحها الطفل حتى يجد أول لعبة؟

رموز رياضية

يستعمل كل من الرمز $E(X)$ والرمز μ للدلالة على توقع المتغير العشوائي X .

التوقع للمتغير العشوائي الهندسي

تعلمت سابقاً أن التوقع $E(X)$ للمتغير العشوائي X هو الوسط الحسابي لقيمته الناتجة من تكرار التجربة نفسها عدداً كبيراً من المرات (عند اقتراب العدد من ∞)، وأنه يساوي مجموع حاصل ضرب كل قيمة للمتغير X في احتمال وقوعها.

يمكن التعبير عن ذلك بالرموز على النحو الآتي:

$$E(X) = \sum x \cdot P(x)$$

أتعلم

تشير القاعدة المجاورة إلى أن التوقع للمتغير العشوائي الهندسي يساوي مقلوب الاحتمال الثابت لجميع المحاولات؛ أي إنه إذا كان احتمال ظهور الصورة عند إلقاء قطعة نقد منتظمة هو $\frac{1}{2}$ ، فإنه من المتوقع ظهور الصورة أول مرة بعد إلقاء قطعة النقد مرتين. إذا كان X متغيراً عشوائياً هندسياً، فإنه يمكن إيجاد توقعه باستعمال الصيغة الآتية

مفهوم أساسي التوقع للمتغير العشوائي الهندسي

إذا كان: $X \sim Geo(p)$ ، فإن: $x \in \{1, 2, 3, \dots\}$ وبعطى التوقع للمتغير العشوائي X بالقاعدة الآتية:

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

حيث p احتمال النجاح في كل محاولة.

كل مرة تجبر نفسك على الدراسة رغم الكسل، أنت تنتصر على أضعف نسخة منك، وتقترب من أقوى نسخة.

أتحقق من فهمي:



ابن إذا كانت التجربة العشوائية تمثل تجربة احتمالية ذات حدين في كل مما يأتي:

(a) إلقاء حجر نرد منتظم 20 مرة، ثم كتابة عدد المرات التي ظهر فيها العدد 1 على الوجه العلوي لحجر النرد.

(b) اختيار 7 طلبة عشوائياً من صف روضة فيه 15 ولدًا و10 بنات، وذلك لتشكيل فريق لإحدى الألعاب، ثم كتابة عدد البنات اللاتي وقع عليهن الاختيار.

التجربة الاحتمالية ذات الحدين

يطلق على تكرار تجربة بيرنولي عددًا محددًا من المرات المستقلة اسم التجربة الاحتمالية ذات الحدين (binomial probability experiment)

مفهوم أساسي التجربة الاحتمالية ذات الحدين

إذا توافرت الشروط الأربعة الآتية في تجربة عشوائية ما، فإنها تعد تجربة احتمالية ذات حدين: (1) اشتغال التجربة على محاولات مستقلة ومتكررة. (2) فرز النتائج الممكنة في كل محاولة إلى نجاح أو فشل.

(3) ثبات احتمال النجاح في كل محاولة.

(4) وجود عدد محدد من المحاولات في التجربة.



مثال 4

أبين إذا كانت التجربة العشوائية تمثل تجربة احتمالية ذات حدين في كل مما يأتي:

① إلقاء قطعة نقد منتظمة 5 مرات، ثم كتابة عدد الصور التي ظهرت.

② إلقاء قطعتي نقد منتظمتين ومتمايزتين حتى ظهور صورتين.

ربما لا ترى نتيجة تمبك الآن، لكن الأيام القادمة ستخبرك أن كل جهد بذلته كان في مكانه الصحيح.



أتعلم

تستعمل التوافيق $\binom{n}{r}$ لإيجاد عدد المرات التي يمكن بها اختيار r شيئاً من بين n شيئاً. وقد استعملت التوافيق في قاعدة احتمال توزيع ذي الحدين لإيجاد عدد الطرائق الممكنة للاختيار الاماكن التي حدث فيها النجاح.

مثال 5

① في تجربة إلقاء قطعة نقد منتظمة 15 مرة، أجد احتمال ظهور الصورة 5 مرات.

② يتألف اختبار فيزياء من 10 أسئلة، جميعها من نوع الاختيار من متعدد، ولكل منها 5 بدائل، واحدة منها فقط صحيحة. إذا أُجيب عن هذه الأسئلة جميعها بصورة عشوائية، فما احتمال أن تكون إجابات 7 أسئلة منها صحيحة؟



③ إذا كان احتمال فوز أمل في لعبة إلكترونية هو 0.75، ولعبت بهذه اللعبة 10 مرات، فما احتمال أن تفوز فيها 8 مرات على الأكثر؟

أتعلم

في المتغير العشوائي ذي الحدين، من الممكن أن $x = 0$ وهذا يدل على عدم إحراز أي نجاح عند تكرار المحاولة n مرة.

المتغير العشوائي ذو الحدين، وتوزيعه الاحتمالي

في التجربة الاحتمالية ذات الحدين، إذا دل المتغير العشوائي X على عدد مرات النجاح في جميع محاولات التجربة التي عددها n ، وكان احتمال النجاح في كل محاولة هو p ، فإن X يسمى المتغير العشوائي ذا الحدين، ويمكن التعبير عنه بالرموز على النحو الآتي: $X \sim B(n, p)$

حيث n, p معاملا المتغير العشوائي.

ومن ثم، فإن المتغير X يأخذ القيم الآتية: $0, 1, 2, \dots, n$ ؛ أي إن:

$$x \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

إذا كان x متغيراً عشوائياً ذا حدين، فإنه يمكن إيجاد احتمال ان يأخذ X قيمة بعينها ضمن مجموعة قيمه الممكنة باستعمال الصيغة الآتية:

مفهوم أساسي: التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ذي الحدين

إذا كان: $X \sim B(n, p)$ ، فإن $x \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ يعطى التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X بالقاعدة الآتية:

$$P(X = r) = \binom{n}{r} p^r (1 - p)^{n-r}$$

حيث:

n : عدد المحاولات في التجربة.

p : احتمال النجاح في كل محاولة.

r : عدد المحاولات الناجحة من بين n من

لا تسمح لليأس أن يسرق منك ما بنيته بتعب شهور. فخطوة واحدة للوراء قد تضيّع الكثير.



التوقع والتباين للمتغير العشوائي ذي الحدين

إذا كان X متغيراً عشوائياً ذا حدين، فإنه يمكن إيجاد توقعه باستعمال اللصيغة الآتية:

التوقع للمتغير العشوائي ذي الحدين **مفهوم أساسي**

إذا كان: $X \sim B(n, p)$ ، فإن: $x \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ يعطى التوقع للمتغير العشوائي X بالقاعدة الآتية:

$$E(X) = np$$

حيث:

n : عدد المحاولات في التجربة.

p : احتمال النجاح في كل محاولة.



مثال 6 من الحياة

طب: أجريت دراسة على الآثار الجانبية الظاهرة على الأطفال بعد تناولهم دواءً جديداً. وقد خلصت الدراسة إلى أن 10% من الأطفال الذين تناولوا هذا الدواء تظهر عليهم أعراض جانبية. إذا أعطى طبيب هذا الدواء لـ 50 طفلاً، فكم طفلاً يتوقع أن تظهر عليه هذه الأعراض؟



أتحقق من فهمي:



سيارات: بعد إجراء مسح للسيارات التي صنعتها شركة ما، تبين أن في 5% منها عطلاً ميكانيكياً. إذا استورد وكيل للشركة في إحدى الدول 1000 سيارة، فأجد عدد السيارات التي يتوقع أن يظهر فيها هذا العطل.

أتحقق من فهمي:



(a) ألفت عائشة حجر نرد منتظماً 10 مرات. ما احتمال ظهور العدد 1 على الوجه العلوي 3 مرات فقط.

(b) تحتوي آلة حاسبة على 16 زرّاً للعمليات الأساسية، والمساواة، والفاصلة العشرية، والأعداد من 0 إلى 9. إذا أغمض أحمد عينيه، ثم ضغط على أزرار هذه الآلة 20 مرة بصورة عشوائية، فما احتمال أن يضغط على أزرار العمليات الحسابية الأساسية 3 مرات فقط؟

(c) إذا كان احتمال نجاح عملية جراحية هو 0.8، وأجرى طبيب هذه العملية 10 مرات خلال عام واحد، فما احتمال أن تنجح 7 عمليات منها على الأقل؟

النجاح لا يأتي فجأة، بل يأتي بعد ألف مرة قلت فيها "أنا تمبت" ثم كملت.



مثال 7

ألقي خالد قطعة نقد غير منتظمة 200 مرة، فكان عدد مرات ظهور الكتابة هو 140 مرة. إذا ألقي خالد قطعة النقد 20 مرة أخرى، فأجد كلاً مما يأتي:

① العدد المتوقع لمرات ظهور الكتابة عند إلقاء خالد قطعة النقد 20 مرة.

② تباين عدد مرات ظهور الكتابة عند إلقاء خالد قطعة النقد 20 مرة.

أتحقق من فهمي:



فحص مراقب الجودة في أحد المصانع 500 عينة عشوائياً من الخلطات الخرسانية، فوجد أن 10 منها لا تطابق المواصفات. إذا فحص مراقب الجودة 200 عينة أخرى، فأجد كلاً مما يأتي:

(a) العدد المتوقع من العينات التي لا تطابق المواصفات من الـ 200 عينة التي فحصها مراقب الجودة.

(b) تباين عدد العينات التي لا تطابق المواصفات من الـ 200 عينة التي فحصها مراقب الجودة.

أتذكر

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= \sum (x^2 \cdot P(x)) - (E(X))^2 \end{aligned}$$

تعلمت سابقاً أن تباين المتغير العشوائي X هو مقياس لتشتت قيم X عن وسطها الحسابي $E(X)$ ، وأنه يرمز إليه بالرمز $Var(X)$ ، أو الرمز σ^2 .

ومن ثم، إذا كان X متغيراً عشوائياً ذا حدين، فإنه يمكن إيجاد تباينه باستعمال الصيغة الآتية:

أتعلم

ألاحظ أنه إذا كان $X \sim B(n, p)$ ، فإن: $Var(X) = (1 - p)E(X)$

مفهوم أساسي التباين للمتغير العشوائي ذي الحدين

إذا كان: $X \sim B(n, p)$ ، فإن التباين للمتغير العشوائي X يعطى بالقاعدة الآتية:

$$Var(X) = \sigma^2 = np(1 - p)$$

حيث:

n : عدد المحاولات في التجربة.

p : احتمال النجاح في كل محاولة.

8) $P(3 \leq X \leq 6)$

9) ألقى حجر نرد منتظم ذو ثمانية أوجه مرقمة بالأعداد من 1 إلى 8 بشكل متكرر حتى ظهور العدد 7. أجد احتمال إلقاء حجر النرد 6 مرات.

10) أطلق عماد رصاصة نحو هدف بصورة متكررة، ثم توقف بعد إصابته الهدف. إذا كان احتمال إصابته الهدف في كل مرة هو 0.7، فما احتمال أن يصيبه أول مرة في المحاولة العاشرة؟



11) أحياء: في دراسة لعالمة أحياء على خنافس في إحدى الحدائق، توصلت العالمة إلى أن واحدة من كل 12 خنفساء لديها جسم برتقالي. إذا بدأت العالمة جمع الخنافس عشوائياً على أن تتوقف عند إيجاد أول خنفساء جسمها برتقالي، فأجد احتمال أن تتوقف عن جمع الخنافس عند جمعها 20 خنفساء.

أدرب وأحل المسائل:



إذا كان: $X \sim Geo(0.2)$ ، فأجد كلا مما يأتي، وأقرب إجابتي إلى أقرب 3 منازل عشرية:

1) $P(X = 2)$

2) $P(X = 10)$

3) $P(X \geq 3)$

4) $P(2 < X \leq 5)$

5) $P(X < 2)$

6) $P(X \leq 4)$

7) $P(1 \leq X < 2)$

لا تبحث عن الراحة الآن، فالراحة الحقيقية تأتي عندما تنتهي وأنت راضٍ عن نفسك.

$$⑰ P(X \leq 8)$$

$$⑱ P(1 < X \leq 4)$$

$$⑲ P(X > 1)$$

$$⑳ P(X < 4)$$

$$㉑ P(0 \leq X < 3)$$

$$㉒ P(3 \leq X \leq 6)$$

أجد التوقع لكل من المتغيرين العشوائيين
الآتيين:

$$㉓ X \sim Geo(0.3)$$

$$㉔ X \sim Geo\left(\frac{3}{7}\right)$$

إذا كان احتمال إصابة شخص ما بأعراض جانبية
بعد تناوله دواءً معيناً هو 0.25، وقرر طبيب
إعطاء مرضاه هذا الدواء إلى حين ظهور إصابة
بأعراضه الجانبية، فأجد كلاً مما يأتي:

⑫ احتمال أن يتوقف الطبيب عن إعطاء المرضى
الدواء عند تناول 10 مرضى هذا الدواء.



⑬ احتمال أن يزيد عدد المرضى الذين سيتناولون
الدواء على 3 مرضى.

⑭ العدد المتوقع للمرضى الذين سيتناولون الدواء
إلى حين ظهور أول إصابة بأعراض الدواء الجانبية.

إذا كان: $X \sim B(10, 0.3)$ ، فأجد كلاً مما يأتي،
وأقرب إجابتي إلى أقرب 3 منازل عشرية:

$$⑮ P(X = 2)$$

$$⑯ P(X \geq 9)$$

29) احتمال أن يواجه الطيار صعوبة في الرؤية أثناء عملية الهبوط في ثلاث مرات على الأقل.

30) احتمال أن يواجه الطيار صعوبة في الرؤية أثناء عملية الهبوط في المرات جميعها.

31) العدد المتوقع من المرات التي سيواجه فيها الطيار صعوبة في الرؤية أثناء عملية الهبوط.

32) إذا كان X متغيراً عشوائياً ذا حدين، وكان: $E(X) = 1.4$, $Var(X) = 1.12$ ، فأجد $P(X \geq 6)$

33) إذا كان: $X \sim Geo(p)$ ، وكان $E(X) = \frac{4}{3}$ ، فأجد قيمة p .

34) إذا كان: $X \sim B(21, p)$ ، وكان: $P(X = 10) = P(X = 9)$ ، فأجد قيمة p .

أجد التوقع والتباين لكل من المتغيرين العشوائيين الآتيين:

25) $X \sim B(5, 0.1)$

26) $X \sim B\left(20, \frac{3}{8}\right)$

27) في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم 9 مرات، أجد احتمال ظهور عدد زوجي 5 مرات.

طيران: يواجه الطيارون صعوبة في الرؤية باحتمال 0.25 عند الهبوط بالطائرات في أحد المطارات خلال فصل الشتاء بسبب سوء الأحوال الجوية. إذا هبط طيار 20 مرة في هذا المطار شتاءً، فأجد كلاً مما يأتي:



28) احتمال أن يواجه الطيار صعوبة في الرؤية خلال الهبوط في ثلاث مرات فقط.

38) تحد: ترسل إحدى الشركات استبانة إلكترونية إلى زبائنها بعد بيعهم منتجاً ما؛ لتعرف التغذية الراجعة حيال المنتج. ولضمان ذلك، فإن الشركة تكرر إرسال كل استبانة إلى حين رد الزبون. إذا كان احتمال رد الزبون على الاستبانة في المرة الأولى أكبر من 0.5، واحتمال رده على الاستبانة في المرة الثانية عند عدم رده عليها في المرة الأولى هو 0.21، وبافتراض أن هذه المحاولات مستقلة، فأجد توقع عدد الاستبانات التي سترسلها الشركة إلى حين رد الزبون، علماً بأن احتمال رد الزبون على أي استبانة لا يتأثر بعدد مرات إرسالها.

💡 **تبرير:** إذا كان عدد الطلبة في أحد الصفوف 25 طالباً، فأجد كلاً مما يأتي:

39) احتمال أن يكون طالب واحد فقط من مواليد شهر آذار.

40) احتمال أن يكون 3 طلبة فقط من مواليد شهر آذار.

41) تحد: إذا كان: $X \sim B(30, 0.1)$ ، فأجد $P(\mu \leq X < \mu + \sigma)$ ، حيث μ هو توقع المتغير العشوائي.

في دراسة لمدوب مبيعات، تبين أن احتمال شراء شخص منتجاً ما بعد التواصل مع 0.1. إذا تواصل مندوب المبيعات مع 10 أشخاص، وكان ثمن المنتج JD10، فأجد كلاً مما يأتي:

35) احتمال أن يشتري جميع الأشخاص المنتج.

36) احتمال أن يكون عائد المبيعات أكثر من JD80.

مهارات التفكير العليا:



37) **أكتشف الخطأ:** أرادت لانا حل السؤال الآتي:

"عند إلقاء قطعة نقد غير منتظمة، كان احتمال ظهور الصورة هو $\frac{5}{11}$. إذا ألقيت قطعة النقد بصورة متكررة حتى تظهر الصورة أول مرة، فما احتمال أن تظهر الصورة أول مرة عند إلقاء قطعة النقد في المرة الثالثة؟". وقد كان حلها على النحو الآتي:

$$P(X = 3) = \frac{5}{11} \left(1 - \frac{5}{11}\right)^3 = \frac{1080}{14641}$$

أكتشف الخطأ في حل لانا، ثم أصححه، وأبرر إجابتي.

« كتاب التمارين »

إذا كان: $X \sim B(5, 0.4)$ ، فأجد كلاً مما يأتي، ثم أقرب إجابتي إلى أقرب 3 منازل عشرية:

9 $P(X = 4)$

10 $P(X \geq 5)$

11 $P(X \leq 3)$

12 $P(3 < X \leq 5)$

13 $P(X > 2)$

14 $P(X < 3)$

15 $P(2 \leq X < 5)$

16 $P(5 < X < 8)$

إذا كان: $X \sim Geo\left(\frac{1}{8}\right)$ ، فأجد كلاً مما يأتي، ثم أقرب إجابتي إلى أقرب 3 منازل عشرية:

1 $P(X = 4)$

2 $P(X \leq 4)$

3 $P(X \geq 2)$

4 $P(3 \leq X \leq 7)$

5 $P(X < 2)$

6 $P(X > 5)$

7 $P(1 < X < 3)$

8 $P(4 < X \leq 6)$

22) احتمال مرور أكثر من 3 سيارات حتى شاهدت نور أول سيارة صفراء.

23) سدد لاعب كرة سلة 15 رمية نحو السلة. إذا كان احتمال تسجيله هدفاً في أي رمية هو 10%، فأجد احتمال أن يسجل هدفاً بـ 3 رميات فقط من بين 15 رمية.

امتحانات: وجد معلم الرياضيات أن 3 طلبة تقريباً من بين كل 5 طلبة يحتاجون إلى استعمال أوراق إضافية أثناء الامتحان. إذا تقدم للامتحان 30 طالباً، فأجد كلاً مما يأتي:

24) احتمال أن يحتاج 10 طلبة إلى استعمال أوراق إضافية

25) احتمال ألا يحتاج أي من الطلبة إلى استعمال أوراق إضافية.

أجد التوقع لكل من المتغيرين العشوائيين الآتيين:

$$17) X \sim Geo(0.45)$$

$$18) X \sim Geo\left(\frac{2}{5}\right)$$

أجد التوقع والتباين لكل من المتغيرين العشوائيين الآتيين:

$$19) X \sim B(10, 0.2)$$

$$20) X \sim B(150, 0.3)$$

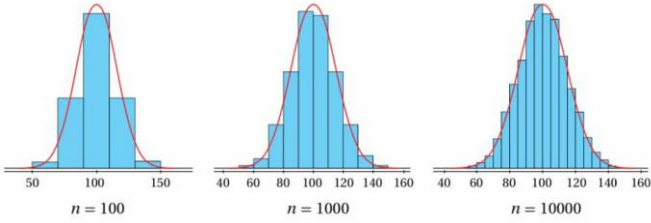
أخذت نور تراقب السيارات المارة أما منزلها. إذا كان احتمال أن تكون أي سيارة تمر من أمام منزلها صفراء اللون هو 0.1، فأجد كلاً مما يأتي:

21) احتمال مرور أقل من 5 سيارات حتى شاهدت نور أول سيارة صفراء.

الدرس الثاني: التوزيع الطبيعي



تبين المدرجات التكرارية الآتية كتل مجموعة من الأشخاص اختيروا عشوائياً من مدينة ما:



ألاحظ أن زيادة حجم العينة n ، وتقليص أطوال الفئات، يجعلان المدرج التكراري أكثر تناسقاً وقرباً من المنحنى المرسوم باللون الأحمر، الذي يسمى المنحنى الطبيعي (normal curve). يستعمل المنحنى الطبيعي لنمذجة البيانات العددية المتصلة التي تختار عشوائياً في كثير من المواقف الحياتية.

بوجه عام، فإن للمنحنى الطبيعي خصائص تميزه عن غيره من المنحنيات الأخرى؛ ما يفسر سبب كثرة استعماله في التطبيقات الحياتية والعلمية المختلفة.

أتعلم:

يجب أن يكون عدد البيانات كبيراً جداً لكي يتخذ تمثيلها البياني شكل المنحنى الطبيعي.

مفهوم أساسي خصائص المنحنى الطبيعي

- يمتاز المنحنى الطبيعي بالخصائص الآتية:
- منحنى متصل له شكل الجرس.
- تطابق الوسط الحسابي والوسيط والمنوال، وتوسطها البيانات.
- تماثل البيانات حول الوسط الحسابي.
- اقتراب المنحنى عند طرفيه من المحور x من دون أن يمسه.
- المساحة الكلية أسفل المنحنى هي 1

مسألة اليوم : إذا كان الزمن الذي تستغرقه الكهرباء في بطارية هاتف محمول قبل أن تنفذ تماماً يتبع توزيعاً طبيعياً، وسطه الحسابي 36 ساعة، وانحرافه المعياري 5 ساعات، فما احتمال أن تعمل البطارية مدة 27 ساعة على الأقل؟



أتذكر:

البيانات العددية المنفصلة هي بيانات تأخذ قيماً قابلة للعد، مثل: عدد الإخوة، وعدد الكتب. أما البيانات العددية المتصلة فهي بيانات قيمها الممكنة غير قابلة للعد، لكنها قابلة للقياس، مثل: الطول، والكتلة.

المنحنى الطبيعي

تعلمت سابقاً ان البيانات العددية هي بيانات يمكن رصدها في صورة أعداد، ويمكن أيضاً قياسها، وإجراء العمليات الحسابية عليها، وترتيبها تصاعدياً وتنازلياً.

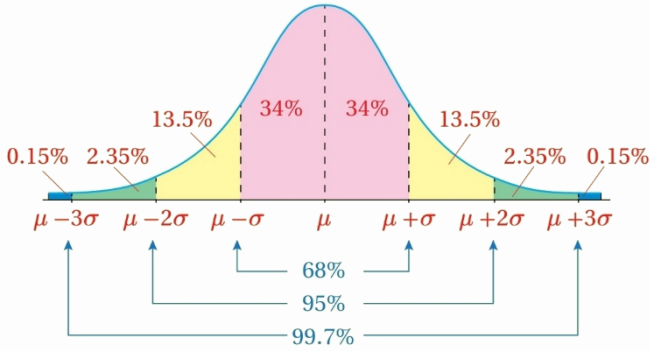
تصنف البيانات العددية إلى نوعين، هما: البيانات المنفصلة، والبيانات المتصلة. ويمكن استعمال

المدرجات التكرارية لتمثيل البيانات العددية المتصلة بيانياً.

القاعدة التجريبية

مفهوم أساسي

إذا اتخذت مجموعة من البيانات شكل المنحنى الطبيعي، وكان وسطها الحسابي μ ، وانحرافها المعياري σ ، فإن:



• 68% من البيانات تقريباً تقع بين

$\mu - \sigma, \mu + \sigma$ ؛ أي إن 68% من البيانات لا يزيد البعد بينها وبين الوسط الحسابي على قيمة الانحراف المعياري.

• 95% من البيانات تقريباً تقع بين

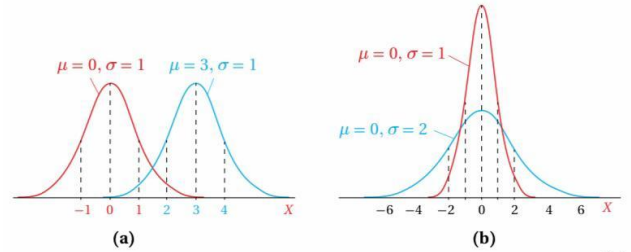
$\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma$ ؛ أي إن 95% من البيانات لا يزيد البعد بينها وبين الوسط الحسابي على مثلي قيمة الانحراف المعياري.

• 99.7% من البيانات تقريباً تقع بين

$\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma$ ؛ أي إن 99.7% من البيانات لا يزيد البعد بينها وبين الوسط الحسابي على ثلاثة أمثال قيمة الانحراف المعياري.

ألاحظ من الشكل (a) أن زيادة الوسط الحسابي من 0 إلى 3 تسببت في انسحاب المنحنى إلى اليمين 3 وحدات، علماً بأن

يعتمد شكل المنحنى الطبيعي وموقعه على الوسط الحسابي μ ، والانحراف المعياري σ للبيانات. فمثلاً، في الشكل (a) التالي، يمكن ملاحظة أن التغير في الوسط الحسابي يؤدي إلى انسحاب أفقي للمنحنى الطبيعي. أما في الشكل (b) فيلاحظ أن زيادة الانحراف المعياري تجعل المنحنى الطبيعي أكثر انتشاراً وتوسعاً.



تمثل المساحة التي تقع بين قيمتين من البيانات أسفل المنحنى الطبيعي النسبة المئوية للبيانات الواقعة بين هاتين القيمتين، ويمكن استعمال القاعدة التجريبية (empirical rule) الآتية لتحديد المساحة التي تقع بين بعض القيم من البيانات أسفل المنحنى الطبيعي:

عندما تشعر أن الطريق طويل، تذكر كم قطعت منه بالفعل، وكم بقي أقل مما مضى.



إذا اتخذت علامات بعض الطلبة شكل المنحنى الطبيعي في أحد الاختبارات، فأجد كلاً مما يأتي:

① النسبة المئوية للعلامات التي تقع فوق الوسط الحسابي.

② النسبة المئوية للعلامات التي لا يزيد البعد بينها وبين الوسط الحسابي على انحراف معياري واحد.

③ النسبة المئوية للعلامات التي تزيد على الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين.

④ النسبة المئوية للعلامات التي تزيد على الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحراف معياري واحد، أو تقل عنه بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين.

أتحقق من فهمي:



إذا اتخذ التمثيل البياني لأطوال مجموعة من طلبة الصف السابع بشكل المنحني، فأجد كلاً مما يأتي:

(a) النسبة المئوية للطلبة الذين تقع أطوالهم فوق الوسط الحسابي.

(b) النسبة المئوية للطلبة الذين لا يزيد البعد بين أطوالهم والوسط الحسابي على انحراف معياري واحد.

(c) النسبة المئوية للطلبة الذين تقل أطوالهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين.

(d) النسبة المئوية للطلبة الذين تقل أطوالهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على ثلاثة انحرافات معيارية، أو تزيد عليه بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين.

إذا ارتبط المتغير العشوائي المتصل X بتجربة عشوائية اتخذ تمثيل بياناتها البياني شكل المنحنى الطبيعي، فإنه يسمى متغيراً عشوائياً طبيعياً، ويسمى توزيعه الاحتمالي التوزيع الطبيعي (normal distribution)، ويمكن التعبير عنه بالرموز على النحو الآتي:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

حيث:

μ : الوسط الحسابي.

σ : الانحراف المعياري.

أتعلم:

يرمز إلى التوزيع الطبيعي بالحرف N ؛ وهو الحرف الأول من الكلمة الإنجليزية (Normal) التي تعني طبيعي.

أتذكر:

لأي حدث A في الفضاء العيني لتجربة عشوائية فإن:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

تعلمت في المثال السابق أن المساحة الواقعة بين قيمتين من البيانات أسفل المنحنى الطبيعي تمثل النسبة المئوية للبيانات الواقعة بين هاتين القيمتين. وبما أن المساحة أسفل المنحنى الطبيعي هي 1، فإنه يمكن إيجاد احتمال بعض قيم المتغير العشوائي الطبيعي باستعمال القاعدة التجريبية، بافتراض أن المساحة أسفل المنحنى كاملة هي احتمال الحادث الأكيد.

المتغير العشوائي الطبيعي، والتوزيع الطبيعي

تعلمت سابقاً أن المتغير العشوائي هو متغير تعتمد قيمه على نواتج تجربة عشوائية.

يوجد نوعان من المتغيرات العشوائية، هما: المتغير العشوائي المنفصل (discrete random variable)، والمتغير العشوائي المتصل (continuous random variable).

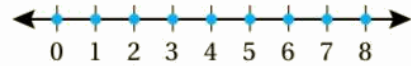
أتعلم:

يعد كل من المتغير العشوائي الهندسي والمتغير العشوائي ذي الحدين متغيراً عشوائياً منفصلاً؛ لأن كلا منهما يأخذ قيمًا معدودةً، مثل: عدد مرات إصابة الهدف، وعدد السيارات.

مفهوم أساسي المتغيرات العشوائية المتصلة والمنفصلة

- المتغير العشوائي المنفصل هو متغير عشوائي يأخذ قيمًا معدودة.

مثال: عدد السيارات التي ستمر أمام إحدى المدارس خلال الساعة القادمة.



- المتغير العشوائي المتصل هو متغير عشوائي يأخذ قيمًا متصلة ضمن فترة معينة من الأعداد الحقيقية.

مثال: سرعة أول سيارة ستمر أمام إحدى المدارس خلال الساعة القادمة.



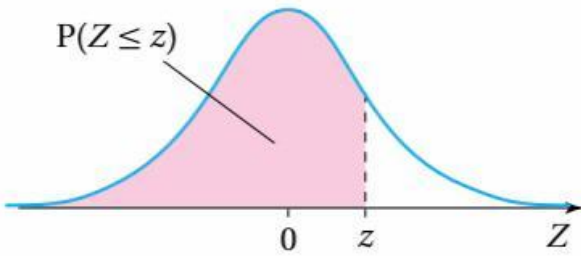
لا تخف من ضغط التوجيهي، فالضغط هو ما يصنع الماس، وأنت قادر أن تخرج متألقاً.

أتعلم:

يستعمل الحرف X عادةً للدلالة على المتغير العشوائي الطبيعي، ويستعمل الحرف Z للدلالة على المتغير العشوائي الطبيعي المعياري.

التوزيع الطبيعي المعياري

يطلق على التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي 0، وانحرافه المعياري 1، اسم التوزيع الطبيعي المعياري (standard normal distribution)، ويمكن التعبير عن المتغير العشوائي الطبيعي المعياري بالرموز على النحو الآتي: $Z \sim N(0,1)$



يبين الشكل المجاور منحنى التوزيع الطبيعي المعياري المتماثل حول الوسط الحسابي 0.

تمثل مساحة المنطقة المظللة احتمال قيم المتغير العشوائي الطبيعي المعياري Z التي تقل عن (أو تساوي) القيمة المعيارية z ، أو $P(Z \leq z)$.

إذن، $P(Z < z)$ تساوي المساحة التي تقع يسار القيمة المعيارية z ، وهي المساحة التي يمكن إيجادها باستعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

أتعلم:

عند استعمال المتغير العشوائي المتصل X ، فإن إشارة المساواة لا تؤثر في قيمة الاحتمال؛ لأن المساحة (الاحتمال) أسفل نقطة واحدة على المنحنى هي صفر. فمثلاً: $P(X \leq x) = P(X < x)$

مثال 2

من الحياة

صناعة: إذا دل المتغير العشوائي X على طول قطر برغي (بالمليمتر) تنتجه آلة في مصنع، حيث: $X \sim N(7, 0.1^2)$ ، فأجد كلاً مما يأتي:



① $P(X > 7)$

② $P(6.9 < X < 7.1)$

أتحقق من فهمي:



صناعة: إذا دل المتغير العشوائي X على طول قطر رأس مثقب (بالمليمتر) تنتجه آلة في مصنع، حيث: $X \sim N(30, 0.4^2)$ ، فأجد كلا مما يأتي:

a) $P(X > 30)$

b) $P(29.6 < X < 30.4)$

c) $P(29.2 < X < 30)$

d) $P(29.2 < X < 30.4)$

التمب الذي تميشه اليوم، ستمنى العودة إليه يوماً لأنك عرفت أنه كان طريق فخر.

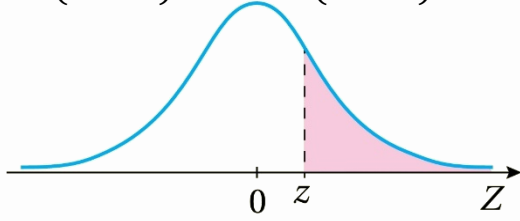
إيجاد احتمال المتغير العشوائي

الطبيعي المعياري

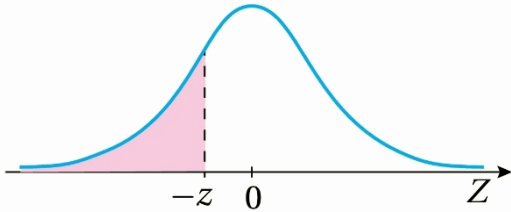
مفهوم أساسي

إذا كان: $Z \sim N(0,1)$ ، فإن:

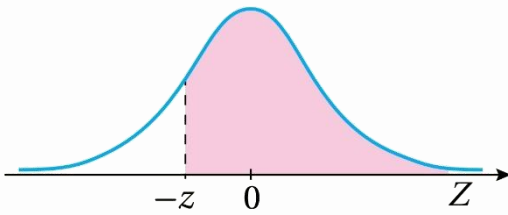
$$1) P(Z > z) = 1 - P(Z < z)$$



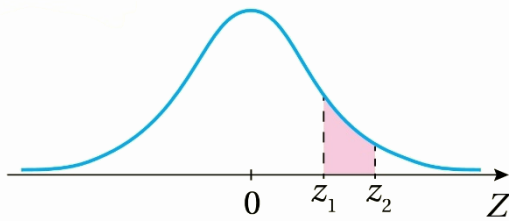
$$2) P(Z < -z) = 1 - P(Z < z)$$



$$3) P(Z > -z) = P(Z < z)$$



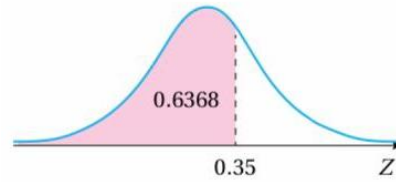
$$4) P(z_1 < Z < z_2) = P(Z < z_2) - P(Z < z_1)$$



أتعلم:

ألاحظ أن جدول لتوزيع طبيعي معياري يحوي احتمالات تقابل قيم z الموجبة فقط؛ لذا يجب أن أحول أي قيمة سالبة للمتغير z إلى قيمة موجبة حتى أتمكن من استعمال الجدول.

يبين الشكل التالي جزءاً من جدول التوزيع الطبيعي المعياري الذي يحتوي فيه العمود الأول من جهة اليسار على منزلة أجزاء العشرة في قيمة z المعيارية، ويحتوي فيه الصف الأول على منزلة أجزاء المئة في قيمة z المعيارية، وتمثل القيمة المقابلة لكل من هاتين القيمتين في الجدول المساحة أسفل المنحنى الطبيعي المعياري التي تقع يسار قيمة z المعيارية، أو $P(Z < z)$. فمثلاً، لإيجاد المساحة أسفل المنحنى الطبيعي المعياري التس تقع يسار $z = 0.35$ ، أجد القيمة المقابلة لكل من 0.3 في العمود الأول، و 0.05 في الصف الأول، وهذه القيمة تساوي $P(Z < 0.35)$.



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088
z	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7421	0.7454

يبين الجدول السابق احتمال القيم التي تقل عن (أو تساوي) لقيمة المعيارية z ، ويمكن أيضاً استعمال الخصائص الأساسية للتوزيع الطبيعي لإيجاد قيم الاحتمال لحالات مختلفة كما يأتي:

لا تجعل صعوبة الطريق سبباً للتوقف، بل اجعلها سبباً لتثبيت لنفسك أنك أقوى مما تظن.

إيجاد احتمال المتغير العشوائي الطبيعي (غير المعياري)

تعلمت في المثال 2 إيجاد احتمالات متغيرات عشوائية طبيعية غير معيارية لقيم محددة، مثل $P(X < \mu - \sigma)$ ، باستعمال القاعدة التجريبية، وتعلمت في المثال 3 إيجاد احتمالات المتغير العشوائي الطبيعي المعياري باستعمال الجدول. والآن سأتعلم إيجاد احتمال أي متغير عشوائي طبيعي غير معياري $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ لأي قيمة، وذلك بتحويله إلى متغير عشوائي طبيعي معياري.

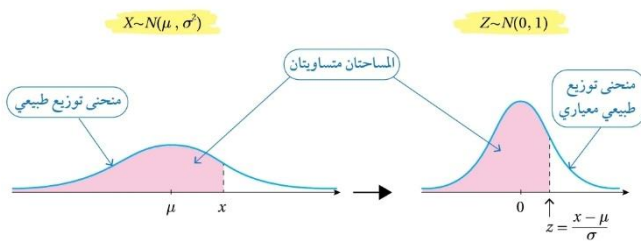
إن طرح الوسط الحسابي من جميع قيم المتغير العشوائي الطبيعي يجعل قيمة الوسط الحسابي 0 بدلاً من μ ، وإن قسمتها جميعاً على الانحراف المعياري تجعل قيمة الانحراف المعياري 1 بدلاً من σ ، وبذلك يصبح منحنى التوزيع الطبيعي معيارياً.

يمكن استعمال الصيغة الآتية لتحويل قيم التوزيع الطبيعي x إلى قيم معيارية z :

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

ب طرح الوسط الحسابي من قيمة x ، ثم القسمة على الانحراف المعياري.

وبذلك يتحول المتغير العشوائي $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ إلى $Z \sim N(0, 1)$ عندئذ يمكن استعمال الجدول لإيجاد احتمال أي من قيمه.



مثال 3

أجد كلاً مما يأتي باستعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

① $P(Z < 2.13)$

② $P(Z > 0.25)$

③ $P(Z < -1.75)$

④ $P(Z > -2.01)$

⑤ $P(-1.1 < Z < 2.34)$

أتحقق من فهمي:



أجد كلاً مما يأتي باستعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

a) $P(Z < 1.5)$

b) $P(Z > 0.61)$

c) $P(Z < -0.43)$

d) $P(Z > -3.23)$

e) $P(-1.4 < Z < 2.07)$

حين تتعب، تذكر أهلك الذين ينتظرون فرحتك، وتذكر نفسك وأنت ترفع رأسك بنتيجتك.



مثال 4

إذا كان: $X \sim N(15, 4^2)$ ، فأجد كل احتمال مما يأتي باستعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

① $P(X < 25)$

② $P(X > 9)$

أتحقق من فهمي:



إذا كان: $X \sim N(7, 3^2)$ ، فأجد كل احتمال مما يأتي باستعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

a) $P(X < -2)$

b) $P(X > 10)$

c) $P(4 < X \leq 13)$

مثال 5

من الحياة

أطوال: توصلت دراسة إلى أن أطوال الرجال في سن العشرين تتبع توزيعاً طبيعياً، وسطه الحسابي $177cm$ ، وانحرافه المعياري $7cm$. إذا اختير رجل عشوائياً، فأجد كلاً مما يأتي:

① احتمال أن يكون طول الرجل أقل من $170cm$.

② احتمال أن يكون طول الرجل أكثر من $191cm$.

أتحقق من فهمي:



أطوال: توصلت دراسة إلى أن أطوال النساء في إحدى المدن تتبع توزيعاً طبيعياً، وسطه الحسابي $165cm$ ، وانحرافه المعياري $5cm$ ، إذا اختيرت امرأة عشوائياً، فأجد كلاً مما يأتي:

a) احتمال أن يكون طول المرأة أقل من $162cm$

b) احتمال أن يكون طول المرأة أكثر من $171cm$

c) احتمال أن يكون طول المرأة بين $171cm, 162cm$

أتحقق من فهمي:



إذا كان X متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا، وسطه الحسابي -3 ، وانحرافه المعياري 4 ، فأجد قيمة x التي تحقق الاحتمال المعطى في كل مما يأتي:

a) $P(X < x) = 0.9877$

b) $P(X < x) = 0.31$

c) $P(X > x) = 0.9738$

d) $P(X > x) = 0.2$

إيجاد الوسط الحسابي أو الانحراف المعياري إذا علم الاحتمال

في بعض المسائل، يكون احتمال إحدى قيم المتغير العشوائي الطبيعي معلومًا، في حين تكون قيمة الوسط الحسابي، أو الانحراف المعياري، أو كلاهما غير معلومة. وفي هذه الحالة، أستعمل قيم الاحتمالات المعلومة لتحديد قيمة الوسط الحسابي، أو الانحراف المعياري للتوزيع الطبيعي.

من الحياة

مثال 7: يدل المتغير العشوائي الطبيعي $X \sim N(\mu, 25)$ على كتل حبات البطاطا العضوية (بالغرام) التي تنتجها إحدى المزارع. إذا زادت كتلة 2% فقط منها على $350.7g$ ، فأجد الوسط الحسابي لكتل حبات البطاطا.



إيجاد قيمة المتغير العشوائي إذا علم الاحتمال

تعلمت في المثال السابق إيجاد احتمال متغير عشوائي طبيعي (غير معياري)، ولكن الاحتمال قد يكون معلومًا في بعض الأحيان، وتكون قيمة المتغير العشوائي X هي المجهولة. وفي هذه الحالة، يمكن استعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري بطريقة عكسية، وذلك بإيجاد قيمة z التي تحقق الاحتمال، ثم استعمال الصيغة:

المعيارية z . $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ لتحديد قيمة x التي تقابل القيمة

مثال 6

إذا كان: $X \sim N(5, 3^2)$ ، فأجد قيمة x التي تحقق الاحتمال المعطى في كل مما يأتي:

① $P(X < x) = 0.7517$

② $P(X < x) = 0.25$

③ $P(X > x) = 0.8438$

④ $P(X > x) = 0.015$

ربما تتعب اليوم أكثر من غيرك، لكنك غدا ستفرح أكثر منهم.



④ النسبة المئوية للطلبة الذين تقل كتلهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين، أو تزيد عليه بمقدار لا يزيد على ثلاثة انحرافات معيارية.

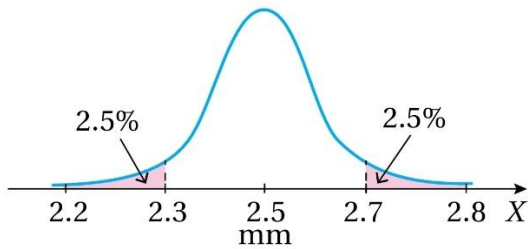
إذا كان: $X \sim N(50, 4^2)$ ، فأجد كلاً من الاحتمالات الآتية باستعمال القاعدة التجريبية:

⑤ $P(X < 50)$

⑥ $P(46 < X < 54)$

⑦ $P(42 < X < 62)$

صناعة: يمكن نمذجة أطوال أقطار مسامير ينتجها مصنع بمنحنى التوزيع الطبيعي المبين في الشكل المجاور:



⑧ أجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لأطوال أقطار المسامير.

أتحقق من فهمي:



يدل المتغير العشوائي الطبيعي $X \sim N(4.5, \sigma^2)$ على كتل أكياس السكر (بالكيلوغرام) التي ينتجها أحد المصانع. إذا زادت كتلة 3% فقط منها على $4.8kg$ ، فأجد الانحراف المعياري لكتل أكياس السكر.

أدرب وأحل المسائل:



إذا اتخذ التمثيل البياني لكتل الطلبة في إحدى المحافظات منحني طبيعيًا، فأجد كلاً مما يأتي:

① النسبة المئوية للطلبة الذين تزيد كتلهم على الوسط الحسابي.

② النسبة المئوية للطلبة الذين تقل كتلهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحراف معياري واحد.

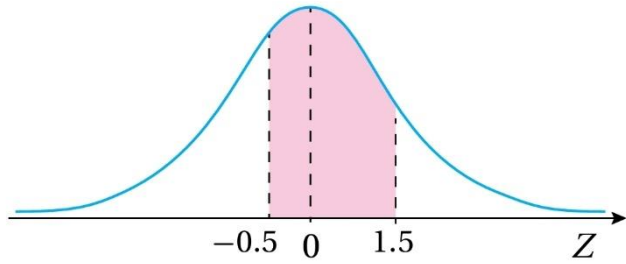
③ النسبة المئوية للطلبة الذين تزيد كتلهم على الوسط الحسابي بمقدار لا يقل عن انحرافين معياريين.

الدراسة في أيام التوجيهي ليست عبئاً، بل استثمار حقيقي لعمركم كامل قادم.

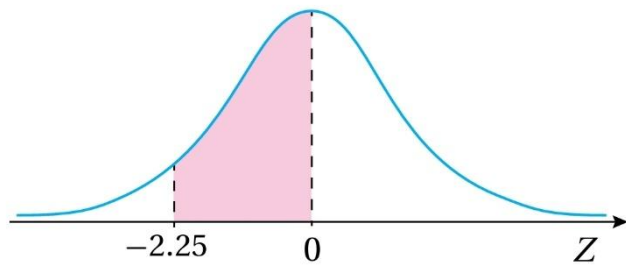
$$⑩ P(1.5 < Z < 2.5)$$

أجد مساحة المنطقة المظلمة أسفل منحني التوزيع الطبيعي المعياري في كل مما يأتي:

⑪



⑫



أجد القيمة المعيارية z التي تحقق كل احتمال مما يأتي:

$$⑬ P(Z < z) = 0.7642$$

$$⑭ P(Z > z) = 0.372$$

$$⑮ P(Z > z) = 0.8531$$

⑨ أجد النسبة المئوية للمسامير التي يزيد طول قطر كل منها على الوسط الحسابي بما لا يزيد على انحرافين معياريين.

⑩ أفاع: يدل المتغير العشوائي $X \sim N(100, \sigma^2)$ على أطوال الأفاعي (بالسنتيمتر) في أحد مجتمعاتها. إذا كانت أطوال 68% منها تتراوح بين 93cm ، 107cm ، فأجد σ^2 .



أجد كلاً مما يأتي باستعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

$$⑪ P(Z < 0.43)$$

$$⑫ P(Z > 1.08)$$

$$⑬ P(Z < -2.03)$$

$$⑭ P(Z > 2.2)$$

$$⑮ P(-0.72 < Z < 0.72)$$

رياضة: تتبع اطول لاعبي كرة السلة توزيعًا طبيعيًا، وسطه الحسابي $185cm$ ، وانحرافه المعياري $4cm$. إذا اختير لاعب عشوائيًا، فأجد كلاً مما يأتي:



29) احتمال أن يزيد طول اللاعب على $175cm$

30) احتمال أن يتراوح طول اللاعب بين $190cm, 180cm$

31) العدد التقريبي للاعبين الذين تزيد أطوالهم على $195cm$ من بين 2000 لاعب.

32) في دراسة عن أشجار الكينا في إحدى الغابات، تبين أن الوسط الحسابي لأطوال هذه الأشجار هو $6m$ ، وأن الانحراف المعياري هو $2m$. إذا كانت أطوال الأشجار تتبع توزيعًا طبيعيًا، فأجد احتمال أن يكون طول شجرة اختيرت عشوائيًا أكثر من 9 أمتار.

إذا كان: $X \sim N(-3, 25)$ ، فأجد كل احتمال مما يأتي باستعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

22) $P(X < 2)$

23) $P(X > 4.5)$

24) $P(-5 < X < -3)$

إذا كان X متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا، وسطه الحسابي 30، وانحرافه المعياري 10، فأجد قيمة x التي تحقق الاحتمال المعطى في كل مما يأتي:

25) $P(X < x) = 0.99$

26) $P(X > x) = 0.1949$

27) $P(X < x) = 0.35$

28) $P(X > x) = 0.05$

37) إذا كان: $X \sim N(\mu, \mu^2)$ ، وكانت قيمة z المعيارية المقابلة لقيمة $x = 1$ هي $z = 2$ ، فأجد قيمة μ .

38) إذا كان: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ يمثل توزيعاً طبيعياً، وكانت قيمة z المعيارية المقابلة لقيمة $x = 10$ هي $z = 1$ ، وكانت قيمة z المقابلة لقيمة $x = 4$ هي -2 ، فأجد قيمة كل من μ و σ .

39) في دراسة لإدارة السير، تبين أن سرعة السيارات على أحد الطرق تتبع توزيعاً طبيعياً، ووسطه الحسابي $90Km/h$ ، وانحرافه المعياري $5Km/h$. إذا كانت السرعة القصوى المحددة على هذا الطريق هي $100Km/h$ ، وكان العدد الكلي للسيارات التي تسير على هذا الطريق في احد الأيام هو 1000 سيارة، فأجد العدد التقريبي للسيارات التي ستتجاوز السرعة المحددة على الطريق في هذا اليوم.



تعبئة: يعبئ مصنع حبوب القهوة في أوعية من الكرتون. إذا كانت كتل الأوعية تتبع توزيعاً طبيعياً، ووسطه الحسابي $232g$ ، وانحرافه المعياري $5g$ ، وكان المتغير العشوائي X يدل على كتلة الوعاء المختار عشوائياً، فأجد كلاً مما يأتي:



33) $P(X < 224)$

34) قيمة x ، حيث: $P(232 < X < x) = 0.2$.

35) صناعة: يدل المتغير العشوائي الطبيعي $X \sim N(\mu, 1.69)$ على أطوال أقطار إطارات دراجات هوائية (بالسنتيمتر) ينتجها أحد المصانع. إذا زاد طول قطر 11% منها على $47cm$ ، فأجد الوسط الحسابي لأطول أقطار الإطارات التي ينتجها المصنع.

36) اختبارات: تتبع العلامات في أحد الاختبارات توزيعاً طبيعياً، ووسطه الحسابي 43. إذا كان X هو المتغير العشوائي للعلامات، فأجد الانحراف المعياري، علماً احتمال ظهور علامة أعلى من 48 هو 0.2.

استمر، فالقادم أجمل، والنجاح أقرب مما تتخيل.

تبرير:

43) تقدم 100000 طالب للاختبار دولي علامته العظمى 100، وبلغ عدد الطلبة الذين زارت علاماتهم في الاخبار على 90 نحو 10000 طالب، منهم 5000 طالب أحرزوا علامات أكثر من 95. إذا كانت علامات الطلبة المتقدمين تتبع توزيعاً طبيعياً، فأجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري للعلامات.

44) تحد: أجرت باحثة تفاعلاً كيميائياً بصورة متكررة، فوجدت أن الزمن اللازم لحدوث التفاعل يتبع توزيعاً طبيعياً، وأن 5% من التجارب يلزمها أكثر من 13 دقيقة لحدوث التفاعل، وأن 12% منها تتطلب أقل من 10 دقائق لحدوث التفاعل. أقدّر الوسط الحسابي والانحراف المعياري لزمن التفاعل.

40) يمكن نمذجة كتل البيض في إحدى المزارع بتوزيع طبيعي، وسطه الحسابي 60g، وانحرافه المعياري 4g. أجد عدد البيض صغير الحجم من بين 5000 بيضة في المزرعة، علماً بأن كتلة البيضة الصغيرة لا تزيد على 55 غراماً.



مهارات التفكير العليا:



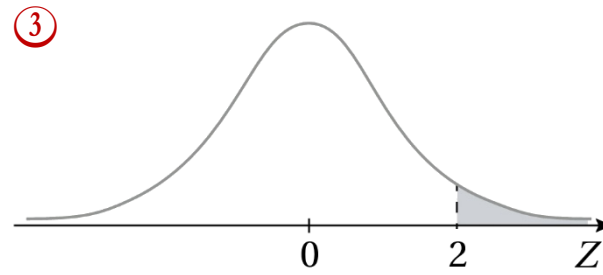
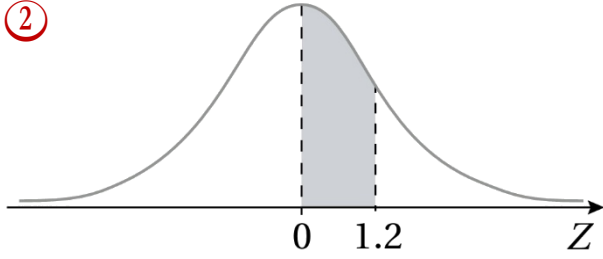
41) أكتشف الخطأ: قالت عبير: "إذا كان: $X \sim N(6.4, 0.09)$ ، فإن 95% من البيانات تقع بين 6.22, 6.58". أكتشف الخطأ في قول عبير، ثم أصححه.

تبرير:

42) إذا كان: $P(X > 35) = 0.025$ ، فأجد قيمة كل من μ, σ ، ثم أبرر إجابتي.



أجد مساحة المنطقة المظللة أسفل منحنى التوزيع الطبيعي المعياري في كل مما يأتي:



أجد القيمة المعيارية z التي تحقق كل احتمال مما يأتي:

④ $P(Z < z) = 0.638$

⑤ $P(Z > z) = 0.6$

⑥ $P(0 < Z < z) = 0.45$

⑦ $P(-z < Z < z) = 0.8$

تبرير:

يبين الشكل المجاور منحنى التوزيع الطبيعي للمتغير العشوائي X الذي وسطه الحسابي 79، وتباينه 144. إذا كان:

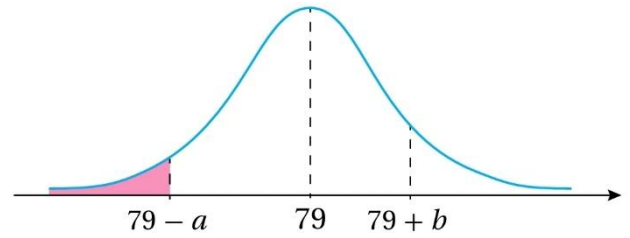
$$P(79 - a \leq X \leq 79 + b) = 0.6463$$

وكان:

$$P(X \geq 79 + b) = 2P(X \leq 79 - a)$$

فأجد كلاً مما يأتي، ثم أبرر إجابتي:

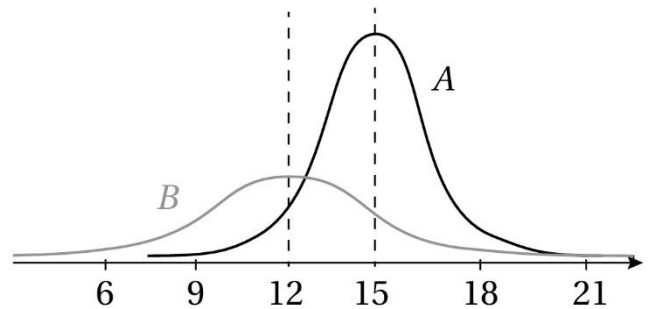
④5 مساحة المنطقة المظللة.



④6 قيمة الثابت b .

كتاب التمارين

① يمثل كل من المنحنيين المجاورين توزيعاً طبيعياً، أقرن بين هذين التوزيعين من حيث قيم الوسط الحسابي، والانحراف المعياري.



لا تجعل لحظة تعب عابرة تمحو حلماً بنيته على مدار سنة كاملة، فالأعلام الكبيرة تحتاج صبراً أكبر.

إذا كان X متغيراً عشوائياً طبيعياً، وسطه الحسابي 30، وانحرافه المعياري 10، فأجد قيمة x التي تحقق الاحتمال المعطى في كل مما يأتي:

$$\textcircled{14} P(X < x) = 0.3$$

$$\textcircled{15} P(X > x) = 0.6915$$

$$\textcircled{16} P(X < x) = 0.7516$$

$$\textcircled{17} P(X > x) = 0.09$$

تعبئة: يعبئ مصنع إنتاجه في حاويات متماثلة تجهيزاً لشحنها، ويقيس كتل هذه الحاويات جميعاً للتحقق من صلاحيتها للشحن. إذا كانت كتل الحاويات تتبع توزيعاً طبيعياً، وسطه الحسابي $1000kg$ ، وانحرافه المعياري $10kg$ ، فأجد كلا مما يأتي:

$$\textcircled{18} \text{النسبة المئوية للحاويات التي تزيد كتلتها على } 1020kg$$

إذا كان: $X \sim N(30, 100)$ ، فأجد كل احتمال مما يأتي باستعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

$$\textcircled{8} P(X < 35)$$

$$\textcircled{9} P(X > 38.6)$$

$$\textcircled{10} P(X > 20)$$

$$\textcircled{11} P(35 < X < 40)$$

$$\textcircled{12} P(15 < X < 32)$$

$$\textcircled{13} P(17 < X < 19)$$

التوجيهي ليس معركة مع المواد، بل معركة مع نفسك، ومن ينتصر على نفسه ينتصر على كل شيء.

٢٣ إذا اختيرت إحدى هؤلاء الطالبات عشوائياً، فأجد احتمال أن يكون طولها أكثر من 169cm

أحدد فترتين تقع في كل منهما تقريباً النسبة المعطاة للطالبات مما يأتي:

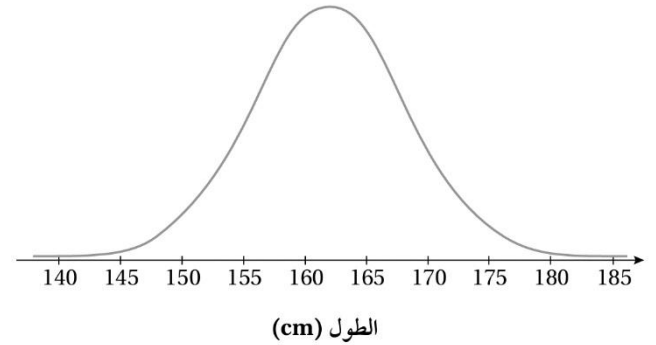
٢٤ 50%

٢٥ 81.5%

١٩ النسبة المئوية للحاويات التي تتراوح كتلتها بين $1010\text{kg}, 990\text{kg}$

٢٠ نسبة الحاويات الصالحة للشحن إذا كانت كتلة الحاوية الصالحة للشحن لا تزيد على 1020kg

يدل المتغير العشوائي X على أطوال طالبات الصف الثاني عشر (بالسنتيمتر) في إحدى المدارس، حيث: $X \sim N(162, 6.3^2)$ اعتماداً على الشكل الآتي الذي يبين منحنى التوزيع الطبيعي للأطوال، أجب عن الأسئلة الخمسة التالية تبعاً:



٢١ أظلل المنطقة التي تمثل: $P(X > 155)$.

٢٢ إذا اختيرت إحدى هؤلاء الطالبات عشوائياً، فأجد احتمال أن يكون طولها أكثر من 155cm

قد لا يكون الطريق سهلاً، لكنه بالتأكيد يستحق كل خطوة تعب تمشيها فيه.

اختبار نهاية الوحدة



أختار رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

5 النسبة المئوية لمساحة المنطقة المحصورة بين $\mu - 3\sigma$ و $\mu + 3\sigma$ أسفل منحني التوزيع الطبيعي هي:

- a) 68% b) 95%
c) 99.7% d) 89.7%

6 إذا كان هطل الأمطار السنوي في إحدى المدن يتبع توزيعاً طبيعياً، وسطه الحسابي $1000mm$ ، وانحرافه المعياري $200mm$ ، فإن احتمال أن يكون هطل الأمطار السنوي أكثر $1200mm$ هو تقريباً:

- a) 0.34 b) 0.16
c) 0.75 d) 0.85

إذا كان: $X \sim Geo(0.3)$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

7 $P(X = 4)$

8 $P(3 < X \leq 5)$

9 $P(X > 4)$

10 $P(5 \leq X \leq 7)$

1 إذا كان: $X \sim Geo(0.1)$ ، فإن $P(X = 1)$ يساوي:

- a) 0.1 b) 0.9 c) 0.5 d) 0

2 إذا كان: $X \sim B(5, 0.1)$ ، فإن $P(X = 6)$ يساوي:

- a) $(0.1)^6$
b) 0
c) $\binom{6}{5} (0.1)^6 (0.9)^{-1}$
d) $\binom{6}{5} (0.1)^5 (0.9)^1$

3 المساحة التي تقع يسار القيمة: $z = -1.73$ أسفل منحني التوزيع الطبيعي المعياري تساوي (بالوحدات المربعة):

- a) 0.4582 b) 0.5280
c) 0.0418 d) 0.9582

4 إذا كان Z متغيراً عشوائياً طبيعياً معيارياً، فإن $P(-2.3 < Z < 0.14)$ يساوي:

- a) 0.4449 b) 0.545
c) 0.6449 d) 0.8449

لا تبحث عن أعذار للتوقف، فكل عذر اليوم سيكون ندماً غداً.



19) $P(X < 1)$

20) $P(X > -3)$

21) تبين في مصنع للمصابيح الكهربائية أن احتمال أن يكون أي مصباح من إنتاج المصنع تالفًا هو 0.17. إذا اختير 100 مصباح عشوائيًا من إنتاج المصنع، فأجد العدد المتوقع من المصابيح التالفة.



22) تفيد إحصائيات أصدرتها إحدى الجامعات بأن 20% فقط من طلبة الجامعة يمارسون التمرينات الرياضية الصباحية بشكل منتظم. أرادت إدارة الجامعة تحفيز الطلبة على ممارسة هذه التمرينات، فبدأت إجراء مقابلات عشوائية مع الطلبة لتعرف إذا كانوا يمارسون هذه التمرينات بانتظام أم لا. أجد عدد الطلبة المتوقع مقابلتهم قبل مصادفة أول طالب يمارس التمرينات الرياضية الصباحية بشكل منتظم.

إذا كان: $X \sim B(10, 0.4)$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

11) $P(X = 3)$

12) $P(X > 2)$

13) $P(7 \leq X < 9)$

14) $P(X \leq 9)$

إذا كان: $X \sim N(4, 9)$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

15) $P(X > 8.5)$

16) $P(-2 < X < 7)$

17) $P(X, 10)$

18) $P(5.5 < X < 8.5)$

29) احتمال أن يزيد طول الرجل على الوسط الحسابي للأطوال بأكثر من انحراف معياري.

30) احتمال ألا يزيد الفرق بين طول الرجل والوسط الحسابي للأطوال على انحراف معياري واحد.

31) يعبا إنتاج مزرعة من التفاح في صناديق، ثم تقاس كتلتها بحسب المواصفات المطلوبة. وقد تبين أن 1578 صندوقاً من أصل 10000 صندوق تزيد كتلة كل منها على 6 kg . إذا كانت كتل الصناديق تتبع توزيعاً طبيعياً، وسطه الحسابي 5 kg ، فأجد الانحراف المعياري لهذه الكتل.



32) إذ كن X متغيراً عشوائياً ذا حدين، وكان: $E(X) = 2.5, Var(X) = 1.875$ ، فأجد $P(X \geq 8)$.

أجد قيمة المعيارية z التي تحقق كل احتمال مما يأتي:

$$23) P(Z > z) = 0.1$$

$$24) P(Z < z) = 0.9671$$

$$25) P(-z < Z < z) = 0.9464$$

$$26) P(Z > z) = 0.9222$$

توصلت دراسة إلى أن أطوال الرجال حول العالم تتبع توزيعاً طبيعياً، وسطه الحسابي 121 cm ، وانحرافه المعياري 10 cm . إذا اختير رجل عشوائياً، فأجد كلاً مما يأتي:

$$27) \text{احتمال أن يزيد طول الرجل على } 181\text{ cm}.$$

28) احتمال أن يكون طول الرجل أقل من الوسط الحسابي للأطوال بأكثر من انحرافين معياريين.

تتبع علامات المتقدمين لاختبار في الرياضيات توزيعاً طبيعياً، وسطه الحسابي 75، وانحرافه المعياري 8.8. أستعمل هذه المعلومات وجدول التوزيع الطبيعي المعياري للإجابة عن الأسئلة الثلاثة الآتية:

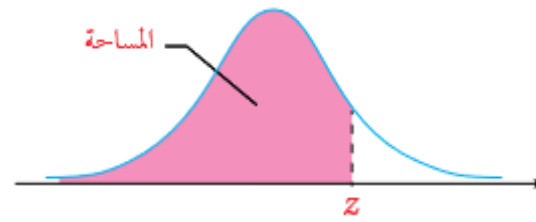
33) ما أقل علامة صحيحة يمكن تصنيفها ضمن أعلى 10% من علامات المتقدمين للاختبار؟

34) إذا تقدم للاختبار 5000 طالب، فما عدد الطلبة الذين يمكنهم إحراز علامة 93 أو أكثر؟

35) إذا اختير أحد المتقدمين للاختبار عشوائياً، فما احتمال أن تكون علامته بين 70، 85؟

ربما لا ترى نتيجة تعبك الآن، لكن الأيام القادمة ستخبرك أن كل جهد بذلته كان في مكانه الصحيح.





جدول التوزيع الطبيعي المعياري

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998