

ادرس

في الرياضيات

رياضيات الأعمال

الوحدة الأولى

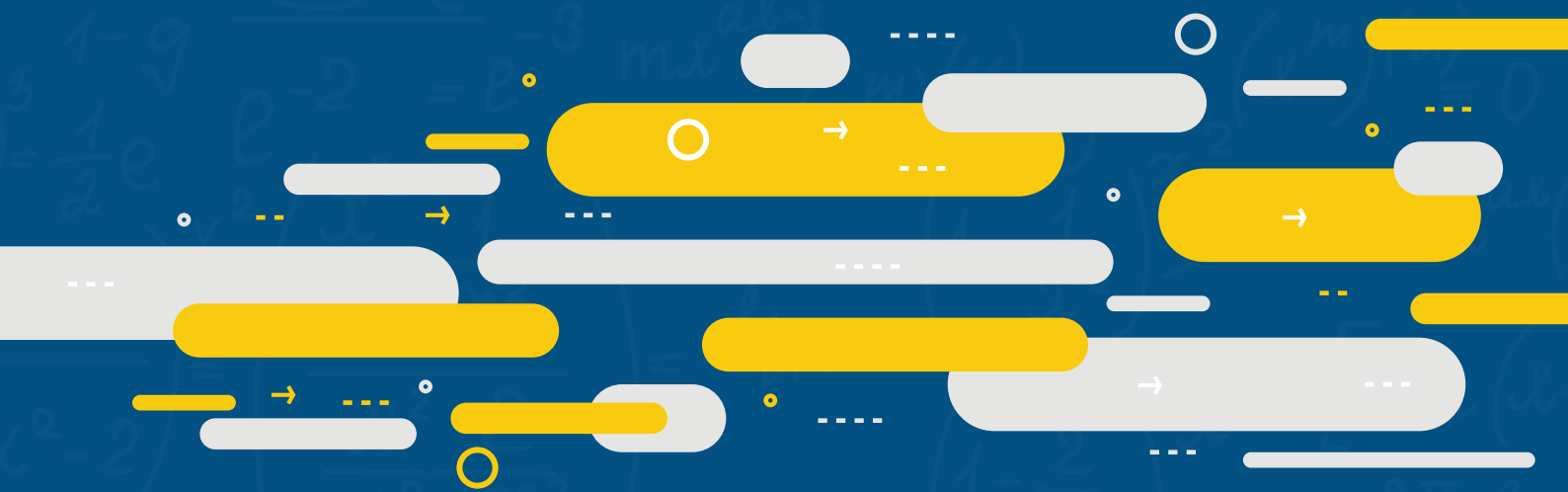
المصفوفات

شاملة لجميع الأسئلة (كتاب الطالب وكتاب التمارين)

الشرح كاملاً على بطاقة منصة ادرس جو

إعداد الأستاذ

أ. أحمد إبراهيم المصري



الوحدة الأولى: المصفوفات

للطالب

مثال 3

أحدّد رتبة كل مصفوفة مما يأتي:

01 $[6 \quad 10]$

02 $\begin{bmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 1 & 7 & 3 \\ 6 & 8 & 1 \end{bmatrix}$

03 $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix}$

04 $[10]$

05 $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

06 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$

مثال 1

استعمل المصفوفة: $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ للإجابة عن الأسئلة الآتية:

01 ما رتبة المصفوفة A ؟

02 ما قيمة كل من العنصر a_{32} والعنصر a_{12} ؟

03 أين يقع العنصر الذي قيمته -1 ؟

مثال 2

استعمل المصفوفة: $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -3 & -5 \end{bmatrix}$ للإجابة عن الأسئلة الآتية:

01 ما رتبة المصفوفة B ؟

02 ما قيمة كل من العنصر b_{24} والعنصر b_{13} ؟

03 أين يقع العنصر الذي قيمته -3 ؟

مثال 3

إذا كانت: $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 9 & 8 \\ 7 & -3 & 5 & 12 \end{bmatrix}$

فأجد قيمة كل عنصر مما يأتي:

01 a_{31}

02 a_{23}

03 a_{14}

04 a_{32}

05 a_{34}

06 a_{13}

مثال 4

إذا كانت:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 0 \\ 5 & -6 & 9 \end{bmatrix}$$

أحدد موقع العنصر الذي قيمته 8 في المصفوفة.

أحدد موقع العنصر الذي قيمته 4 في المصفوفة.

أحدد موقع العنصر الذي قيمته 5 في المصفوفة.

أحدد موقع العنصر الذي قيمته -1 في المصفوفة.

مثال 5

أحدد النوع والرتبة لكل مصفوفة مما يأتي:

01 $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

02 $B = [4 \quad 5 \quad 7]$

03 $C = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$

04 $D = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 6 & 4 & 0 \\ 12 & 9 & 5 \end{bmatrix}$

05 $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

أنواع خاصة من المصفوفات

مصفوفة صف: تتكون من صف واحد وعدد من الأعمدة

مصفوفة عمود: تتكون من عمود واحد وعدد من الصفوف

المصفوفة المربعة: يتساوى فيها عدد الصفوف مع عدد الأعمدة

المصفوفة الصفيرية: جميع عناصرها أصفار

المصفوفتان المتساويتان: لهما نفس الرتبة والعناصر المتناظرة متساوية.

مثال 6

01 إذا كانت: $\begin{bmatrix} 2 & x+1 \\ 3y+10 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ y & 1 \end{bmatrix}$

فأجد قيمة كل من x و y

06 $F = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

07 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$

08 $A \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$

02 إذا كانت $\begin{bmatrix} 3x-2 & 8 \\ 2 & 2x+4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 8 \\ 2 & 18 \end{bmatrix}$

فأجد قيمة كل من x و y

09 $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

10 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

تنظيم البيانات في المصفوفات وتحليلها

إذا كانت:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 4 & z & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x + 2y & 4 \\ 3x - 11 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

فأجد قيمة كل من x, y, z

مثال 7

الصف الدراسي	العمر (year)	الكتلة (kg)	الطول (cm)
هديل	10	38	135
هبة	14	50	155
لانا	12	45	145

يُبين الجدول لجاور
الأطوال والكتل
الأعمار والصفوف
لدراسية لشقيقات

الثلاث هديل وهبة ولانا في إحدى المدارس:

01

أرتب هذه البيانات في مصفوفة رتبته 3×4 ، بحيث يمثل الطول والكتلة والعمر والصف الدراسي صفوف المصفوفة.

02

أجد مجموع عناصر الصف الأول، ثم أبين ما يمثله هذا المجموع (إن كان له معنى).

03

أجد مجموع عناصر الصف الرابع، ثم أبين ما يمثله هذا المجموع (إن كان له معنى).

04

هل إيجاد الوسط الحسابي لعناصر الصف الثاني يُقدّم بيانات ذات معنى؟ أبرر إجابتي.

03

04

إذا كانت:

$$\begin{bmatrix} 9 & x^2 \\ 2 - y & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2x + 3 \\ -5 & 10 \end{bmatrix}$$

فجد قيمة كل من x و y

مثال 8

سياحة: يبين الجدول
المجاور نتائج استطلاع
آراء عينات من سكان
ثلاث قرى متجاورة

	مُؤيِّد	مُعَارِض	مُحَايِد
القرية A	800	130	70
القرية B	460	250	40
القرية C	1300	700	200

بخصوص مشروع سياحي يُراد إقامته في موقع يتوسط هذه القرى:

01: أرتب هذه البيانات في مصفوفة صفوفها القرى؛ على أن يكون
عدد المؤيدين مرتباً ترتيباً تصاعدياً.

02: أجد مجموع عناصر الصف الأول، ثم أبين ما يمثله هذا المجموع
(إن كان له معنى)

03: أجد مجموع عناصر العمود الثاني، ثم أبين ما يمثله هذا
المجموع (إن كان له معنى)

04: هل إيجاد الوسط الحسابي لعناصر العمود الثاني يُقدِّم بيانات
ذات معنى؟ أبرر إجابتي.

مثال 9

يبيّن الجدول المجاور
إنجازات ثلاثة من لاعبي
كرة القدم في مباريات
دوري الصفوف في إحدى المدارس:

	الأهداف	التسديدات	المباريات
سمير	7	15	8
أحمد	13	25	11
فواز	9	20	14

01: أنظّم هذه البيانات في المصفوفة S ، بحيث تحوي صفوفها إنجازات
اللاعبين الثلاثة، ويرتب فيها عدد الأهداف تنازلياً، ثم أجد قيمة العنصر

S_{32}

02: أجد مجموع عناصر الصف الثاني، ثم أبين ما يمثله هذا المجموع (إن
كان له معنى)

03: أجد مجموع عناصر العمود الثالث، ثم أبين ما يمثله هذا المجموع
(إن كان له معنى)

مثال 10

كهربائيات: تتوزع 3 مستودعات لإحدى وكالات تجارة الأجهزة الكهربائية في 3 مدن. يوجد في مستودع المدينة الأولى 200 ثلاجة، و380 غسالة، و250 شاشة، و300 مروحة، ويوجد في مستودع المدينة الثانية 160 ثلاجة، و540 غسالة، و290 مروحة، ويوجد في مستودع المدينة الثالثة 120 ثلاجة، و280 غسالة، و400 شاشة، و470 مروحة:

01 أنظم هذه البيانات في مصفوفة تمثل أعمدتها أنواع الأجهزة الكهربائية، ثم أحدد رتبة المصفوفة الناتجة.

02 أجمع عناصر كل صف، ثم أبين ما يمثله هذا المجموع (إن كان له معنى).

03 أجمع عناصر كل عمود، ثم أبين ما يمثله هذا المجموع (إن كان له معنى).

مثال 11

سُئِلَت الأسر في مدينتين عن مصدر التدفئة الذي تستعمله في فصل الشتاء، ثم سُجِّلَت النتائج في الجدول المجاور الذي يُبين عدد الأسر التي تستعمل كل مصدر. كيف يُمكن عرض بيانات الجدول بصورة أخرى مُختصرة؟

	الغاز	الكهرباء	الكاز	أخرى
المدينة A	3256	1678	4589	1253
المدينة B	4560	978	5874	2564

مهارات التفكير العليا

مثال 12

تبرير:

أبين إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائماً، أو صحيحة أحياناً، أو غير صحيحة أبداً، ثم أبرر إجابتي.

إذا كان للمصفوفة A والمصفوفة B العدد نفسه من العناصر، فإن $A = B$.

مثال 14

تبرير:

إذا كان عدد عناصر المصفوفة B عدداً أولياً، فماذا يمكن أن تكون رتبته؟ أبرر إجابتي.

مثال 15

تبرير:

إذا كانت المسافة بين إربد وعمّان 88 km ، والمسافة بين عمان والعقبة 324 km ، والمسافة بين إربد والعقبة 408 km ، فأنشئ مصفوفة رتبته 3×3 لتمثيل المسافات بين المدن الثلاث، ثم أبرر إجابتي.

مثال 13

مسألة مفتوحة:

أنشئ مصفوفة مربعة من الرتبة 3، وأسَمِّها A ، بحيث يكون

$$a_{ij} = a_{ji} \text{ ، لكل } i, j$$

مثال 16

تجد:

أكتب المصفوفة b ، حيث: $b_{ij} = 2i - j$ لكل $i \in \{1,2,3\}$

ولكل $j \in \{1,2,3,4\}$

مثال 17

تجد:

أجد قيمة كل من x, y, z إذا كانت:

$$\begin{bmatrix} x + 2y & x - y \\ x + y + 3z & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 7 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$$

الدرس الثاني: العمليات على المصفوفات

يُمكن جمع مصفوفتين أو طرحهما إذا فقط إذا كانت لهما الرتبة نفسها ، وذلك بجمع العناصر المتناظرة في المصفوفتين في حالة الجمع ، وطرح هذه العناصر في حالة الطرح.

مثال 1

إذا كان:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & -5 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 0 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \\ -9 & 1 \end{bmatrix}$$

جد كل مما يأتي (إن أمكن):

01 $A + C$

02 $A + B$

03 $B - D$

04 $C - A$

05 $D + B$

06 $C + D$

مثال 3

إذا كان $D = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 7 & -2 & 1 \\ 8 & 10 & 6 \end{bmatrix}$ ، فأوجد كل مما يأتي:

01 $3D$

02 $-2D$

03 $1.5D$

ضرب المصفوفة في عدد ثابت

عند ضرب المصفوفة في عدد ثابت، فإن ذلك يعني ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة في هذا العدد الثابت.

مثال 2

إذا كان: $C = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ ، فأوجد $5C$

خصائص العمليات على المصفوفات

مفهوم أساسي

خصائص العمليات على المصفوفات

إذا كان A, B, C ثلاث مصفوفات لها الرتبة نفسها، وكان k, h عددين حقيقيين، فإن:

1. $A + B = B + A$ الخاصية التبديلية لجمع المصفوفات
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ الخاصية التجميعية لجمع المصفوفات
3. $k(A + B) = kA + kB$ خاصية توزيع الضرب في ثابت

مثال 4

إذا كان:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 12 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -8 & 1 \end{bmatrix}$$

فأوجد $3A + 2B - 5C$

مثال 5

إذا كان:

$$E = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}, G = [3 \ 0 \ 7], H = [6 \ -4 \ 9]$$

فأوجد كل مما يأتي (إن أمكن):

01 $4E - 3F$

02 $2G + 6F$

03 $5(G + H)$

مثال 6

تجارة:

لدى إحدى الشركات التجارية فرعان في مدينة عمان، وفرعان آخران في مدينة إربد. إذا مثلت المصفوفة A والمصفوفة B معدل المبيعات والأرباح اليومية من الأدوات الكهربائية (بمئات الدنانير) في كل من فرعي هاتين المدينتين على الترتيب، فأجد المصفوفة C ، التي تمثل معدل المبيعات والأرباح الشهرية لفروع الشركة في المدينتين معاً.

$$A = \begin{bmatrix} \text{الأرباح} & \text{المبيعات} \\ 56 & 4 \\ 45 & 3.5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{عمّان 1} \\ \text{عمّان 2} \end{matrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \text{الأرباح} & \text{المبيعات} \\ 48 & 3 \\ 66 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{إربد 1} \\ \text{إربد 2} \end{matrix}$$

مثال 7

زراعة:

يملك كل من راشد وحمد مزرعة في الأغوار، ومزرعة أخرى في المفرق. إذا مثلت المصفوفة A معدل الإنتاج اليومي (بالكيلوغرام) لمزريعتيهما في الأغوار من البندورة والباذنجان والفل، ومثلت المصفوفة B معدل الإنتاج اليومي لمزريعتيهما في المفرق من الأصناف نفسها، فأجد المصفوفة C التي تمثل معدل الإنتاج الأسبوعي (بالكيلوغرام) لمزريعتي راشد وحمد في الموقعين معاً.

$$A = \begin{bmatrix} \text{فل} & \text{باذنجان} & \text{بندورة} \\ 200 & 500 & 100 \\ 260 & 430 & 245 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{راشد} \\ \text{حمد} \end{matrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \text{فل} & \text{باذنجان} & \text{بندورة} \\ 130 & 100 & 300 \\ 240 & 300 & 175 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{راشد} \\ \text{حمد} \end{matrix}$$

أجد ناتج كلِّ ممَّا يأتِي (إنَّ أمكن):

4 $\begin{bmatrix} 12 & -3 \\ 22 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$

1 $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 4 & 6 \\ 10 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 5 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$

5 $\begin{bmatrix} 25 & 10 & 13 \\ 0 & 7 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -31 & 26 & -9 \\ 7 & 2 & 12 \end{bmatrix}$

2 $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 8 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 8 & -2 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

6 $[32 \quad -12 \quad 8] - [-6 \quad 43 \quad -7]$

3 $\begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$

7 $3 \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ 4 & 1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$

$$11 \quad -4 \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ -2 & 7 & 4 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 6 & 10 \\ 5 & -4 & 1 \\ 8 & -1 & 7 \end{bmatrix} \right)$$

$$8 \quad \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 15 & -21 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$$

$$9 \quad -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & 12 & -32 \\ 9 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$12 \quad 2 \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -3 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$10 \quad 2 \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

19 رياضة: لدى محلّ تجهيزات رياضية فرع في مدينة الكرك، وفرع آخر في مدينة الطفيلة. إذا مثّلت المصفوفة A عدد البدلات الرياضية التي باعها الفرعان من جميع المقاسات (صغيرة، متوسطة، كبيرة) في شهر نيسان عام 2024 م، ومثّلت المصفوفة B عدد البدلات التي باعها الفرعان من المقاسات الثلاثة في شهر نيسان عام 2023 م، فأجد المصفوفة التي تُمثّل ما باعه كلّ من الفرعين في الشهرين معاً.

$$A = \begin{bmatrix} \text{الكرك} & \text{متوسط} & \text{صغير} \\ 20 & 15 & 10 \\ 12 & 30 & 17 \end{bmatrix} \text{ الطفيلة}, \quad B = \begin{bmatrix} \text{الكرك} & \text{متوسط} & \text{صغير} \\ 18 & 42 & 23 \\ 20 & 25 & 21 \end{bmatrix} \text{ الطفيلة}$$

إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}$ ، فأجد كلّاً ممّا يأتي (إن أمكن):

13 $4A + 3B$

14 $2C - 3A$

15 $B + 1.5B$

16 $3B + 2C$

17 $2A - C$

18 $4A + 3C$

21 أجد قيمة كل من x ، y ، و z التي تُحقق المعادلة الآتية:

$$2 \begin{bmatrix} x & 3 \\ 6 & y \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x & 6 \\ z & -2 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} z & 3 \\ 0 & x \end{bmatrix}$$

20 مدارس: يُبين الجدول المجاور محتويات مختبري الحاسوب في إحدى المدارس عام 2024 م. تُخطِّط إدارة المدرسة لزيادة هذه المحتويات بما

نسبته 40%. أكتب مصفوفة تُمثِّل ما يجب شراؤه للمختبرين، ومصفوفة أخرى تُمثِّل محتويات المختبرين بعد عملية الشراء.

	أجهزة حاسوب	طاولات	مقاعد
المختبر A	15	20	30
المختبر B	20	25	40

22

تُمثّل المصفوفة: $A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.75 \\ 0.6 & 1 \\ 1.5 & 2.5 \end{bmatrix}$ أسعار البيع (بالدينار) لثلاثة مشروبات (شاي، قهوة، عصير) بأكواب صغيرة وأخرى كبيرة في أحد الأكشاك. وقد قرّر صاحب الكشك رفع الأسعار بما نسبته 20%؛ نظرًا إلى زيادة التكاليف. ما المصفوفة التي تُمثّل الأسعار الجديدة؟

مهارات التفكير العليا

23

تبرير: أحدّد إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبدًا، ثم أبرّر إجابتي:

إذا كان عدد عناصر المصفوفة A مُساويًا لعدد عناصر المصفوفة B ، فإنّه يُمكن إيجاد $A + B$.

24

أكتشف الخطأ: ما الخطأ في الحل الآتي:

$$\times \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 11 & 0 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

26

تحدد: أجد المصفوفتين X, Y اللتين تحققان المعادلتين الآتيتين:

$$X - 2Y = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}, 3X + 4Y = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -31 & 12 \end{bmatrix}$$

25

مسألة مفتوحة:

$$3A + 2B = \begin{bmatrix} 12 & 8 & 10 \\ 6 & -5 & 11 \end{bmatrix} \text{ أكتب المصفوفتين } A, B, \text{ بحيث يكون:}$$

مثال 2

إذا كانت $A_{2 \times 2}$ وكانت $B_{3 \times 2}$ ، وكانت $C_{2 \times 3}$ فأبين إذا كانت عملية الضرب في كل مما يأتي ممكنة أم لا.

وإن كانت كذلك، أدد رتبة مصفوفة الضرب الناتجة

01 AB

02 BC

03 CA

ضرب المصفوفات

يمكن ضرب مصفوفتين إذا وفقط إذا كان عدد أعمدة المصفوفة الأولى مساوياً لعدد صفوف المصفوفة الثانية.

وعند ضرب المصفوفة A التي رتبته $m \times n$ في المصفوفة B التي رتبته $n \times r$ ،

فإن رتبة المصفوفة الناتجة $A \times B$ هي $m \times r$

$$\begin{array}{ccc} A & \times & B \\ m \times n & & n \times r \end{array} = \begin{array}{c} AB \\ m \times r \end{array}$$

↑ ↑ ↑
مُساويان
رتبة AB

مثال 1

إذا كانت $A_{2 \times 3}$ وكانت $B_{2 \times 2}$ ، وكانت $C_{3 \times 2}$ فأبين إذا كانت عملية الضرب في كل مما يأتي ممكنة أم لا.

وإن كانت كذلك، أدد رتبة مصفوفة الضرب الناتجة

1 AB

2 AC

ضرب المصفوفات

تختلف عملية ضرب مصفوفتين عن عمليتي جمعها وطرحها؛
إذ لا تضرب العناصر المتناظرة في بعضها كما في عمليتي جمع
المصفوفات وطرحها

مثال 3

إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ -3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ وكان: $B = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ فأجد: AB .

مثال 5

إذا كان: $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ وكان: $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ فأجد: CD .

أفكر

متى يمكن ضرب
مصفوفة في نفسها؟

مثال 6

شطرنج:

تنافست ثلاث فرق في البطولة النهائية لنادي الشطرنج، وقد دُون عدد مرّات الفوز والتعادل لهذه الفرق في الجدول المجاور. إذا علمت أن فوز الفريق في المباراة الواحدة يعني حصوله على 3 نقاط، وأن تعادله يعني حصوله على نقطة واحدة، فأستعمل المصفوفات في إيجاد عدد النقاط التي حصل عليها كل فريق لتحديد الفريق الفائز.

الفريق	ربح	تعادل
A	5	4
B	6	3
C	4	5

مثال 7

كرة قدم:

يُبين الجدول المجاور نتائج 3 فرق لكرة القدم بعدما لعب كلٌّ منها 4 مباريات. إذا علمت أن فوز الفريق في المباراة الواحدة يعني حصوله على 3 نقاط، وأن تعادله يعني حصوله على نقطة واحدة، وأن خسارته تعني عدم حصوله على أي نقاط، فأستعمل المصفوفات في إيجاد عدد النقاط التي حصل عليها كل فريق لتحديد الفريق الفائز.

الفريق	ربح	تعادل	خسارة
A	1	0	3
B	3	1	0
C	1	1	2

خصائص ضرب المصفوفات

يُحقق ضرب المصفوفات بعض خصائص ضرب الأعداد الحقيقية. وفي ما يأتي بعض خصائص الضرب التي تتحقق في المصفوفات.

خصائص ضرب المصفوفات

مفهوم أساسي

أتعلم

الخاصية التبديلية لا تتحقق في ضرب المصفوفات؛ أي إن: $BA \neq AB$ حيث A و B مصفوفتان. بالرغم من ذلك، فقد توجد حالات خاصة لمصفوفتين A و B تكون فيها $AB = BA$.

تُعدُّ الخصائص الآتية صحيحة لأيِّ ثلاث مصفوفات: R, S, T ، وأيِّ عدد حقيقي c ؛ شرط أن تكون عمليتا الجمع والضرب مُعرَّفتين في جميع الحالات الآتية:

1. $(RS)T = R(ST)$ خاصية التجميع لضرب المصفوفات
2. $c(RS) = (cR)S = R(cT)$ خاصية التجميع لضرب المصفوفات في عدد حقيقي
3. $R(S + T) = RS + RT$ خاصية توزيع ضرب المصفوفات على جمعها من اليسار
4. $(R + S)T = RT + ST$ خاصية توزيع ضرب المصفوفات على جمعها من اليمين

مثال 8

إذا كان: $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ وكان: $k = 3$, فأجد كلاً مما يأتي:

1 $P(Q + R)$

2 $k(PQ)$

3 $(PQ)R$

مثال 9

إذا كان: $F = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $H = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ، فاجد كلاً

مما يأتي:

a) $(F+G)H$

b) $(FG)H$

c) $G(mH)$

إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0.5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & -1.5 & -1 \\ 0.5 & 0 & 2 \\ 1.5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ، فأبيِّن إذا كانت

عملية الضرب في كلِّ ممَّا يأتي مُمكنة أم لا. وإنْ كانت كذلك، أَّحدِّ رتبة مصفوفة الضرب الناتجة:

1 AB

2 BC

3 DC

4 BA

5 CD

6 BB

7 CB

8 BCD

9 إذا كان: $AB = C$ ، وكانت رتبة المصفوفة A هي: 4×3 ، ورتبة المصفوفة C هي: 4×5 ، فما رتبة المصفوفة B ؟

أجد ناتج كل مما يأتي (إن أمكن)

10 $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

11 $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \times [2 \quad 5 \quad 3]$

12 $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

13 $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

$$14 \quad [8 \quad 10 \quad -7] \times \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$15 \quad \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 9 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -5 & 6 & -4 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$16 \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \times [-1 \quad 4]$$

$$17 \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 & -14 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$$

18 $\left(\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \right)^2$

19 $\left(\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \right)^2$

	الطراز X	الطراز XD	الطراز R
المدينة A	12	10	0
المدينة B	4	4	20
المدينة C	8	9	12

20 صناعة سيارات: تتوزع 3 مصانع لإحدى شركات صناعة

السيارات في 3 مدن، ويُبين الجدول المجاور عدد ما

يُنتجه كل مصنع يوميًا من 3 طرازات للسيارات. إذا كان

ربح الشركة في كل سيارة من الطراز X هو JD1000، ومن

الطراز XD هو JD 2000، ومن الطراز R هو JD1500، فأستعمل ضرب المصفوفات في إيجاد ربح كل مصنع يوميًا

من جميع طرازات السيارات (بافتراض أن جميع السيارات المُنتجة مبيعة).

21 إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$ ، فأبَيِّن أنَّ: $AB = AC$.

إذا كان: $P = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 9 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ، فاجد كلاً ممَّا يأتي: $n = -2$ ، وكان: $n = -2$

22 $(QR)P$

23 $n(PQ)$

24 $R(PQ)$

25 $(nR)P$

إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ x & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ y & 4 \end{bmatrix}$ ، حيث x, y عددان صحيحان موجبان، فأجد:

26 AB بدلالة x, y .

27 BA بدلالة x, y .

28 أصغر قيمة صحيحة موجبة لكلٍّ من x ، و y التي تجعل $AB = BA$.

29 **مُكْسَّرَات:** يُعَبِّئ مَحْمَص خليطاً من المُكْسَّرَات والفواكه المُجَفَّفة في نوعين من الأكياس كما في الجدول الأيسر، ويبيّن الجدول الأيمن عدد وحدات البروتين والكربوهيدرات والدهون في الغرام الواحد من المُكْسَّرَات والفواكه المُجَفَّفة. أستمعمل ضرب المصفوفات لإيجاد عدد وحدات البروتين والكربوهيدرات والدهون في كل نوع.

	مُكْسَّرَات (g)	فواكه مُجَفَّفة (g)
الكيس 1	150	150
الكيس 2	200	100

	بروتين	كربوهيدرات	دهون
مُكْسَّرَات	20	21	52
فواكه مُجَفَّفة	3	65	1

حجم الكوب	كبير	مُتَوَسِّط	صغير
عبر شبكة الإنترنت	5	4	2
من المتجر	3	5	9

دَوَّنت سلمى في الجدول المجاور عدد ما باعتها في متجرها من أكواب حافظة للحرارة مُتَعَدِّدة الحجم (كبيرة، مُتَوَسِّطة، صغيرة) في أحد الأيام. كذلك دَوَّنت طريقة بيع هذه الأكواب؛

وهي إمّا مباشرة من المتجر، وإمّا عبر شبكة الإنترنت. إذا كان سعر الكوب الكبير JD 4.5، وسعر الكوب المُتَوَسِّط JD 4، وسعر الكوب الصغير JD 3.5، فكيف يُمكن استعمال ضرب المصفوفات لإيجاد المبلغ الذي حصلت عليه سلمى من بيع الأكواب بكلتا طريقيتي البيع؟

مهارات التفكير العليا



31 أكتشف الخطأ: حَسَبْتَ كُلَّ من رنا وعبير العنصر c_{23} في المصفوفة: $C = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 12 \\ -2 & 3 & 4 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 1 & -2 & -6 \\ 11 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

كما يأتي:

إجابة رنا

$$c_{23} = -8 - 18 + 20 \\ = -6$$

إجابة عبير

$$c_{23} = 12 - 8 - 18 \\ = -14$$

أيهما إجابتهما صحيحة؟ أبرّر إجابتي.

32 تبرير: إذا كان A, B مصفوفتين مُربَّعتين من الرتبة n ، فلماذا $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ ؟

33 مسألة مفتوحة: أكتب المصفوفتين A, B غير الصفريتين، بحيث يكون $AB = BA$.

34 تحدّ: أجد قيمة كلٍّ من e, f, g, h التي تجعل المعادلة الآتية صحيحة:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 6 & 15 \end{bmatrix}$$

المُحدِّدات وقاعدة كيرمر

المُحدِّدات

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & -8 \\ 9 & 8 & 10 \\ -4 & -6 & 7 \end{bmatrix}$$

القُطر الرئيس

المُحدِّدَة للمصفوفة المربعة A هي عدد حقيقي يرتبط بالمصفوفة A ، ويُرمز إليه بالرمز $|A|$. يُطلق على مجموعة العناصر الممتدة من الزاوية اليسرى العلوية إلى الزاوية اليمنى السفلية في المصفوفة اسم القُطر الرئيس للمصفوفة.

للقُطر الرئيس دور أساسي في إيجاد مُحدِّدَة مصفوفة من الرتبة 2×2 . وفي ما يأتي طريقة إيجاد مُحدِّدَة المصفوفة ذات الرتبة 2×2 ، أو ما يُسمى مُحدِّدَة الدرجة الثانية.

مُحدِّدَة الدرجة الثانية

مفهوم أساسي

بالكلمات: يُرمز إلى مُحدِّدَة المصفوفة: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ بالرمز $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ، وتساوي قيمتها ناتج ضرب عنصري القُطر الرئيس مطروحًا منه ناتج ضرب عنصري القُطر الآخر.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad \text{بالرموز:}$$

مثال 1

أجد قيمة كلٍّ من المحدّات الآتية:

01 $\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

02 $\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 8 \end{vmatrix}$

03 $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}$

04 $\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

05 $\begin{vmatrix} 5 & 20 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$

06 $\begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$

07

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

08

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}$$

09

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

10

$$\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

يُطلق على مُحدّدة المصفوفة ذات الرتبة 3×3 اسم مُحدّدة الدرجة الثالثة ويمكن حساب قيمتها بتوظيف مُحدّدة الدرجة الثانية كما هو مبين أدناه.

مُحدّدة الدرجة الثالثة

مفهوم أساسي

يُمكن إيجاد مُحدّدة المصفوفة: $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ باستعمال الطريقتين الآتيتين:

الطريقة 1: باستعمال قاعدة الأقطار.

الخطوة 1: أُعيد كتابة العمود الأوّل والعمود الثاني على يمين المُحدّدة.

$$\begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix}$$

الخطوة 2: أجد ناتج ضرب عناصر القطر الرئيس، وثلاثيات العناصر على المُوازيات الحمراء المُبيّنة، ثمّ أجد مجموعها الكلي.

$$\begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix}$$

الخطوة 3: أجد ناتج ضرب عناصر القطر الآخر، وثلاثيات العناصر على المُوازيات الزرقاء المُبيّنة، ثمّ أجد مجموعها الكلي.

الخطوة 4: أجد قيمة المُحدّدة بطرح ناتج الخطوة 3 من ناتج الخطوة 2.

الطريقة 2: باستعمال مُحدّدة المصفوفة 2×2

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

مثال 2

أجد قيمة $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 6 \\ 6 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}$ باستعمال قاعدة الأقطار، ثم باستعمال مُحدّدة المصفوفة 2×2

مثال 3

أجد قيمة كلٍّ من المحدّثات الآتية باستعمال قاعدة الأقطار، ثمَّ باستعمال مُحدّدة المصفوفة 2×2 :

01
$$\begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 5 & 8 & -2 \\ 4 & 7 & 3 \end{vmatrix}$$

02
$$\begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

03

$$\begin{vmatrix} -6 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

04

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

مثال 4

أجد قيمة كل مُحدّدة ممّا يأتي باستعمال قاعدة الأقطار، ثمّ باستعمال مُحدّدة المصفوفة 2×2

a)
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ -2 & 3 & 4 \\ -5 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

b)
$$\begin{vmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

حساب مساحة المثلث باستعمال المُحدِّدات

يُمكن حساب مساحة مثلث عُلِمَت إحداثيات رؤوسه في المستوى الإحداثي باستعمال القاعدة الآتية.

مفهوم أساسي

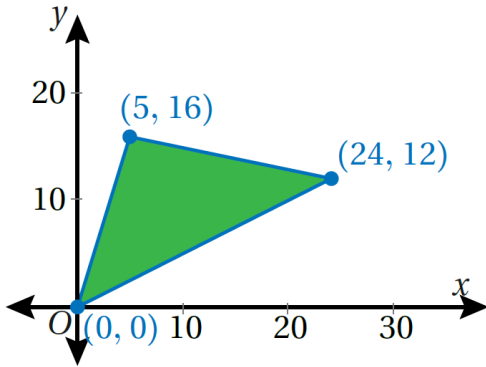
مساحة مُثلَّث مرسوم في المستوى الإحداثي باستعمال المُحدِّدات

مساحة المثلث الذي إحداثيات رؤوسه: $X(x_1, y_1)$, $Y(x_2, y_2)$, $Z(x_3, y_3)$ هي نصف القيمة المطلقة للعدد A ، حيث:

$$A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

تستعمل القيمة المطلقة للعدد A ؛ لأن المساحة لا تكون سالبة.

مثال 5

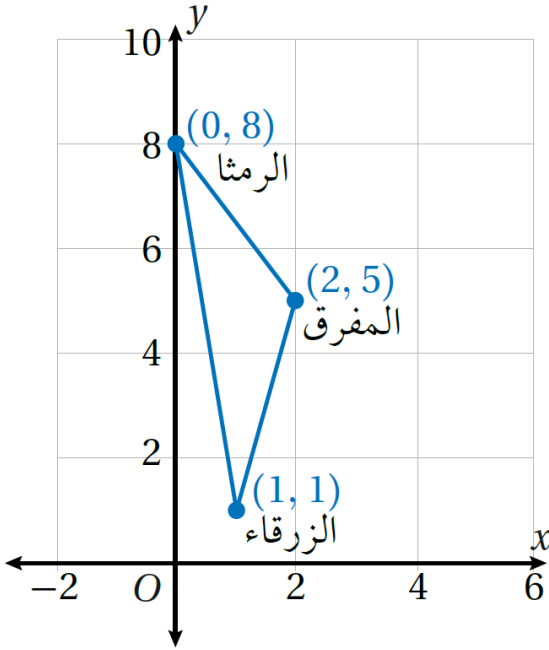


يظهر في المستوى الإحداثي المجاور مخطط لجزيرة على شكل مثلث.

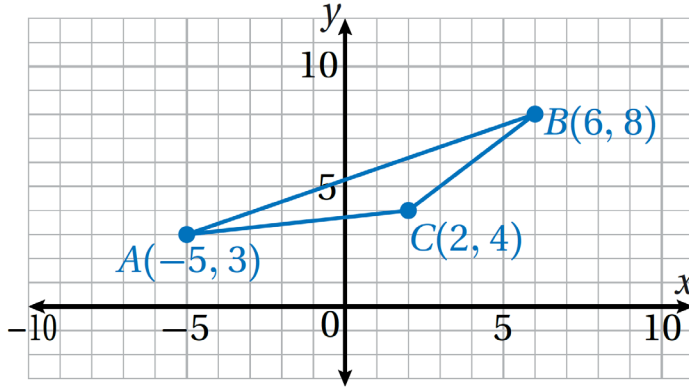
إذا كانت كل وحدة في المستوى الإحداثي تمثل 1 km ، فأجد مساحة الجزيرة.

مثال 6

يظهر في المستوى الإحداثي المجاور إحداثيات كل من مدينة الزرقاء، ومدينة الرمثا، ومدينة المفرق. إذا كانت كل وحدة في المستوى الإحداثي تمثل 10 km ، فأجد مساحة المنطقة التي رؤوسها هذه المدن الثلاث.



أجد مساحة المثلث ABC المرسوم في المستوى الإحداثي أدناه.



مثال 8

خرائط: يقع منزل خولة عند النقطة $B(3, 5)$ على خريطة إحداثية للمدينة، ويقع منزل فدوى عند النقطة $C(7, 0)$ ، ويقع منزل نُهَي عند النقطة $D(5, 9)$. أجد مساحة المثلث BCD ، علماً بأنَّ الوحدة الواحدة على الخريطة تُمثِّل 20 m على الأرض.

حل أنظمة المعادلات والمُحدّات

يُمكن استعمال المُحدّات لحل أنظمة معادلات خطية بمتغيرين، كلٌ منها مكتوب في صورة: $ax + by = c$. أنشئ أولاً مصفوفة عناصرها معاملات المتغيرين x و y ، وهي تُسمى **مصفوفة المعاملات** (coefficient matrix)، ثمَّ أحسب مُحدّتها؛ فإذا كانت المُحدّدة لا تساوي صفراً، فإنّه يوجد حلٌ وحيد للنظام. أمّا إذا كانت المُحدّدة تساوي صفراً، فإنّما ألا يكون للنظام حلٌّ، وإنّما أن يكون له عدد لانهائي من الحلول. وفي حال لم تكن قيمة مُحدّدة مصفوفة المعاملات صفراً، فيمكن استعمال **قاعدة كريمر** (Cramer's rule) لإيجاد حل النظام كما هو مبين أدناه.

قاعدة كريمر

مفهوم أساسي

إذا كان: $C = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ مصفوفة المعاملات للنظام: $\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$ ،

وكان: $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ، حيث $D \neq 0$ ، فإنَّ حلَّ النظام هو:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{D}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{D}$$

مثال 9

أحلُ نظام المعادلات الآتي باستعمال قاعدة كريمر (إن أمكن)

$$3x + 5y = 1$$

$$2x + y = -4$$

مثال 10

أحلّ نظام المعادلات الآتي باستعمال قاعدة كريمر (إن أمكن)

01

$$-2x + 7y = 12$$

$$x + y = 3$$

02

$$4x - 3y = 29$$

$$2y + 5x = -5$$

03

$$x + 5y = -17$$

$$3x - 4y = 6$$

04

$$2x - 3y = 29$$

$$6y - 4x = 12$$

05

$$5x - 4y = 22$$

$$4x + 3y = -1$$

06

$$6x - 7y = -11$$

$$5x + 4y = 40$$

مثال 11

ما قيمة c التي تجعل مُحددة مصفوفة المعاملات للنظام الآتي تساوي صفراً

$$2x + y = 6$$

$$cy = 3 - x$$

مثال 12



يُطلق اسم المُثلث الذهبي على واحدة من أهمّ الوجهات السياحية في جنوب الأردن، وهي المنطقة التي تضمّ مدينة العقبة ومدينة البترا ووادي رم. إذا كانت إحداثيات المناطق الثلاث على خريطة للمملكة في مستوى إحداثي، وحدته 1 km، هي: $(0, 0)$ للعقبة، و $(56, 116)$ للبترا، و $(6, 50)$

لواوي رم، فاستعمل المُحددات لحساب مساحة المُثلث الذي رؤوسه هذه المواقع الثلاثة.

مهارات التفكير العليا



أولاً: أكتب مصفوفة مربعة من الرتبة 2×2 تحقق الشرط المعطى في كل مما يأتي:

مُحدّدتها تساوي صفراً.

مُحدّدتها تساوي 1-

جميع عناصرها أعداد موجبة، ومُحدّدتها 12-

ثانيًا:

تجد: عند حل نظام من معادلتين بمتغيرين باستعمال قاعدة كرامر، فإن الحل هو:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 7 & a \\ b & c \end{vmatrix}}{5}, x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{5}$$

ما قيمة كل من a و b و c ؟

الدرس الخامس: النظرير الضربي للمصفوفة وأنظمة حل المعادلات الخطية

مصفوفة الوحدة، ونظير المصفوفة الضربي

معلوم أن ناتج ضرب أي عدد حقيقي في العدد 1 هو العدد نفسه؛ إذ إن $x(1) = 1(x) = x$ لأي عدد حقيقي x . لذلك يُسمى العدد 1 عنصراً مُحايداً لعملية ضرب الأعداد الحقيقية.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

كذلك توجد مصفوفة مُربَّعة تُسمى **مصفوفة الوحدة** (identity matrix)، ويُرمز إليها بالرمز I ، ويكون جميع عناصر قُطرها الرئيس 1، وتكون بقيّة عناصرها أصفاراً، وتمتاز بخاصية في ضرب المصفوفات تُشبه خاصية العدد 1 في ضرب الأعداد الحقيقية.

يمكن التحقق من أن ناتج ضرب المصفوفة I في أي مصفوفة مُربَّعة A ، لها نفس رتبة I ، هو المصفوفة A نفسها؛ أي إن:

$$I \times A = A \times I = A$$

أتعلّم

- مصفوفة الوحدة من الرتبة 2×2 هي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- مصفوفة الوحدة من الرتبة 3×3 هي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

المصفوفة المُحايدة لعملية ضرب المصفوفات

مفهوم أساسي

بالكلمات: مصفوفة الوحدة I هي المصفوفة المُحايدة لعملية ضرب المصفوفات، التي إذا ضربت في أي مصفوفة أخرى من الرتبة نفسها كان ناتج الضرب هو المصفوفة الأخرى نفسها.

بالرموز: لأي مصفوفة مُربَّعة A ، لها رتبة المصفوفة المُحايدة I نفسها، فإن:

$$I \times A = A \times I = A$$

إذا كانت المصفوفتان A, B مُربَّعتين من الرتبة نفسها، وكان: $A \times B = B \times A = I$ ، فإن المصفوفة A تُسمى **نظيراً ضربياً** (multiplicative inverse) للمصفوفة B ، وتُسمى المصفوفة B أيضاً نظيراً ضربياً للمصفوفة A .

أتعلّم

إذا كان A, B مصفوفتين مُربَّعتين من الرتبة نفسها، وكان $AB = I$ ، فإن $BA = I$.

النظير الضربي للمصفوفة المُربَّعة

مفهوم أساسي

النظير الضربي للمصفوفة المُربَّعة A هو المصفوفة A^{-1} ، حيث:

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$$

أتعلّم

A^{-1} هو رمز للنظير الضربي للمصفوفة A ، وليس $\frac{1}{A}$.

مثال 1

أبين في كل مما يأتي إذا كانت كل مصفوفة تمثل نظيراً ضربياً للمصفوفة الأخرى:

01 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

02 $F = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$

03 $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

04 $C = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2.5 & 1.5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

05

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

06

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

07

$$L = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

08

$$G = \begin{bmatrix} -3 & -11 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1.5 & 5.5 \\ -0.5 & -1.5 \end{bmatrix}$$

إيجاد النظير الضربي لمصفوفة غير مُنفردة من الرتبة 2×2

إذا كانت مُحددة المصفوفة تساوي صفراً، فلا نظير ضربياً لها، وتُسمى عندئذٍ مصفوفة مُنفردة (singular matrix). أما المصفوفة التي مُحددتها لا تساوي صفراً، فإن لها نظيراً ضربياً، وتُسمى عندئذٍ مصفوفة غير مُنفردة (non-singular matrix). يُمكن إيجاد النظير الضربي لمصفوفة غير مُنفردة من الرتبة 2×2 ، إذا كانت مُحددتها لا تساوي صفراً كما هو مبين أدناه.

النظير الضربي لمصفوفة غير مُنفردة من الرتبة 2×2

مفهوم أساسي

بالكلمات: إذا كانت مُحددة المصفوفة A ذات الرتبة 2×2 لا تساوي صفراً، فإن لها نظيراً ضربياً يُمكن إيجادها باتباع الخطوات الآتية:

1. تبديل موقع كل من عنصري القطر الرئيس.
2. ضرب عنصري القطر الآخر في -1 .
3. ضرب المصفوفة الناتجة في مقلوب المُحددة، أو $\left(\frac{1}{|A|}\right)$.

بالرموز: إذا كانت: $|A| \neq 0$ ، فإن النظير الضربي للمصفوفة: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هو: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

مثال 2

أبين إذا كانت كل مصفوفة مما يأتي مُنفردة أو غير مُنفردة، ثم أجد النظير الضربي للمصفوفة غير المُنفردة:

01

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$$

02

$$F = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

03

$$H = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

04

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

05

$$K = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ -8 & -7 \end{bmatrix}$$

المعادلات المصفوفية

المعادلة المصفوفية (matrix equation) هي معادلة تتضمن مصفوفات مجهولة (أو تكون بعض عناصرها مجهولة)، ومصفوفات معلومة، إضافةً إلى عمليات على تلك المصفوفات. أمّا طريقة حلّ المعادلة المصفوفية: $AX = B$ فتشبه طريقة حلّ المعادلة: $ax = b$ ، حيث a, b, x أعداد حقيقية كما هو مبين أدناه.

معادلة مصفوفية

$$AX = B$$

$$A^{-1}(AX) = A^{-1} \times B \quad \text{بضرب الطرفين في } A^{-1} \text{ من اليسار}$$

$$(A^{-1} \times A)X = A^{-1} B \quad \text{خاصية التجميع}$$

$$(I)X = A^{-1} B \quad \text{خاصية النظير الضربي}$$

$$X = A^{-1} B \quad \text{خاصية الضرب في المصفوفة المحايدة}$$

معادلة جبرية

$$ax = b$$

$$\frac{1}{a}(ax) = \frac{1}{a}(b) \quad \text{بضرب الطرفين في } \frac{1}{a}$$

$$\left(\frac{1}{a} \times a\right)x = \frac{b}{a} \quad \text{خاصية التجميع}$$

$$(1)x = \frac{b}{a} \quad \text{خاصية النظير الضربي}$$

$$x = \frac{b}{a} \quad \text{خاصية العنصر المُحايد}$$

لحلّ نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين، أحولهما أولاً إلى معادلة مصفوفية صورتها: $AX = B$ ، حيث A مصفوفة معاملات المتغيرين، و X مصفوفة المتغيرات في المعادلتين الخطيتين، و B مصفوفة الثوابت، فيكون حلّ هذا النظام هو: $X = A^{-1} B$ ؛ شرط أن تكون المصفوفة A غير مُنفردة.

مثال 3

أحلّ نظام المعادلات الآتي باستعمال النظير الضربي (إن أمكن):

$$5x + 3y = 3$$

$$x - 2y = 11$$

أحلُ نظام المعادلات الآتي باستعمال النظير الضربي (إن أمكن):

$$3x - y = 13$$

$$3y - 2x = 4$$

مثال 5

من الحياة

كيمياء: يعمل يوسف في أحد مختبرات البحوث، وهو يريد تحضير 50 L من محلول حمض الهيدروكلوريك (HCL) بحيث تكون نسبة تركيزه 35% إذا علمت أن المختبر يحوي من هذا الحمض محلولاً نسبة تركيزه 15% ، ومحلولاً آخر نسبة تركيزه 40% ، فكم لتراً سيستعمل يوسف من كلا المحلولين؟
أكتب معادلة مصفوفية تمثل المسألة، ثم أحلها.

مثال 6

طهي: يوجد في معمل للحلويات محلولان، تركيز الشُّكَّر في أحدهما 12%، وتركيزه في الآخر 20%. يريد الطاهي تحضير 20 L من محلول، تركيز الشُّكَّر فيه 15%. كم لترًا سيستعمل الطاهي من كلا المحلولين المتوافرين في المعمل؟ أكتب معادلة مصفوفية تُمثِّل المسألة، ثمَّ أحلّها.

أَبَيِّنْ إِذَا كَانَتْ كُلُّ مِنَ الْمَصْفُوفَاتِ الْآتِيَةِ مُنْفَرِدَةً أَوْ غَيْرَ مُنْفَرِدَةٍ، ثُمَّ أَجِدِ النَّظِيرَ الضَّرْبِيَّ لِغَيْرِ الْمُنْفَرِدَةِ مِنْهَا:

5 $P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

6 $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

7 $S = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

8 $V = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

أحلُّ كلًّا من أنظمة المعادلات الآتية باستعمال النظير الضربي (إن أمكن)

9

$$3x + 5y = 13$$

$$x - 2y = -3$$

10

$$-2x + 4y = 6$$

$$x + 2y = 7$$

11

$$5x - 8y = 31$$

$$2y - 3x = -13$$

12

$$x + y = 20$$

$$x - 2y = -1$$

13

$$3x + 2y = 8$$

$$x = y + 1$$

14

$$2x + 7y = 24$$

$$4x + 13y = 46$$

15 **صيدلة:** لدى صيدلي محلولان، تركيز الملح في أحدهما 2%، وتركيزه في الآخر 12%. يريد الصيدلي تحضير 10 L من محلول، تركيز الملح فيه 10%. ما المعادلة المصفوفية التي يتعين استعمالها لتحضير الكمية المطلوبة من المحلول؟ أكتب معادلة مصفوفية تُمثّل المسألة، ثمّ أحلّها.

16 أوراق نقدية: مع سعاد مجموعة من الأوراق النقدية من فئة JD 10، وفئة JD 20، تبلغ قيمتها الإجمالية JD 750. إذا علمتُ أنَّ عدد أوراق فئة العشرين دينارًا يقلُّ عن مثلي عدد أوراق فئة عشرة الدينانير بمقدار 5 أوراق، فأكتب معادلة مصفوفية تُمثل المسألة، ثمَّ أحلُّها لإيجاد عدد أوراق النقد التي مع سعاد من كلتا الفئتين.

17 ما قيمة x التي تجعل المصفوفة: $\begin{bmatrix} 5 & x \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ مُنفردة؟

18 ما قيمة a التي تجعل المصفوفة: $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ نظيراً ضربياً لنفسها؟

19 إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$, فأجد المصفوفة C , بحيث يكون: $(B + C)^{-1} = A$.

20 إذا كان A مصفوفة من الرتبة 2×2 , حيث: $A^2 = 2A - 3I$, فأثبت أن: $A^3 = A - 6I$.

مسألة اليوم

استأجر مُنظِّمُ رحلة بحرية في خليج العقبة 8 قوارب،
بعضها يحمل 4 أشخاص، وبعضها الآخر يحمل
7 أشخاص. إذا كان عدد المشاركين في الرحلة
50 شخصاً، فأستعمل معادلة مصفوفية لإيجاد عدد
القوارب المُستأجرة من كل نوع.

مهارات التفكير العليا



22 **تبرير:** إذا كان: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ وكانت: $a > 0, d > 0, b < 0, c < 0, |A| \neq 0$ ، فهل توجد عناصر سالبة في A^{-1} ؟
أبرر إجابتي.

23 **برهان:** إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، وكان: $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ ، فأثبت أن: $(AB)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$.

24 أكتشف المختلف: أي المصفوفات الآتية مختلفة؟ أبرر إجابتي.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

25 تحدّد: إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, فأجد المصفوفة B التي تُحقّق المعادلة: $BA^2 = A$.

الدرس 1

مُقَدِّمة في المصفوفات Introduction to Matrices

أحدّد رتبة كل مصفوفة ممّا يأتي:

1 $\begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 5 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

2 $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$

3 $\begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

4 $[-4 \ 3 \ 7]$

5 $\begin{bmatrix} 5 & 8 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

6 $\begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \\ 1 & 9 & 10 \end{bmatrix}$

المشروب	صغير	وسط	كبير
غازي	40	60	75
شاي	30	40	55
قهوة	50	70	90
عصير	65	90	125

يُبيّن الجدول المجاور الأسعار (بالقروش) لعدد من المشروبات في أحد المحال التجارية:

7 أرّتب هذه البيانات في مصفوفة رتبها 4×3 ، ثمّ أسمى المصفوفة P .

8 أجد العنصر p_{32} ، ثمّ أبين ما يمثّله.

9 ما رمز العنصر 55 في هذه المصفوفة؟

10 إذا كانت: $\begin{bmatrix} 5 & x+3 \\ 8 & 0 \\ 1 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ x+y & 0 \\ 1 & y+4 \end{bmatrix}$ ، فأجد قيمة كلّ من x ، و y ، و z .

	المدارس	المراكز الصحيّة
1 المحافظة	54	12
2 المحافظة	94	23
3 المحافظة	75	18

خدمات حكومية: يُتوقع إنشاء مدارس ومراكز صحيّة جديدة عام 2025م و عام 2026م في ثلاث محافظات كما هو مبين في الجدول المجاور:

11 أرّتب هذه البيانات في مصفوفة رتبها 2×3

12 أجد مجموع عناصر الصف الأول، ثمّ أبين ما يمثّله هذا المجموع (إن كان له معنى).

13 أجد مجموع عناصر العمود الثاني، ثمّ أبين ما يمثّله هذا المجموع (إن كان له معنى).

الدرس 2

العمليات على المصفوفات Operations on Matrices

إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 7 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ -3 & 1 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 8 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} -9 & 30 & 36 \\ 12 & 15 & -24 \end{bmatrix}$ فأجد كلاً ممّا يأتي (إن أمكن):

1 $A + B$

2 $B + C$

3 $C - D$

4 $B - A$

5 $4A$

6 $3A - 2B$

7 $D + 2C$

8 $-\frac{2}{3}D$

9 أكتب المصفوفة: $A = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{7}{6} \end{bmatrix}$ في صورة: $A = kM$ ، حيث k عدد ثابت، و M مصفوفة عناصرها أعداد صحيحة.

10 إذا كانت: $\begin{bmatrix} 3 & a \\ -2 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & 11 \\ -4 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3b \\ c & d \end{bmatrix}$ فأجد قيمة كلٍّ من a ، و b ، و c ، و d .

يتبع

العمليات على المصفوفات Operations on Matrices

الدرس
2

11 إذا كانت: $\begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y & x \\ x & -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$ ، فأجد قيمة كل من x ، و y .

12 إذا كانت: $3 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - 2B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ ، فأجد المصفوفة B .

13 أجد قيمة كل من x ، و y التي تُحقق المعادلة الآتية:

$$x \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (3-y) & -7 \end{bmatrix}$$

14 **صناعة:** يُبين الجدول الأسر عدد ما أنتجته 3 مصانع لإحدى الشركات من 3 طرازات لأجهزة التكييف المنزلي في النصف الأول من عام 2020م، ويُبين الجدول الأيمن عدد أجهزة التكييف المنزلي المُنتجة في النصف الثاني من العام نفسه في هذه المصانع. أكتب مصفوفة تُمثل عدد ما أنتجه كل واحد من هذه المصانع الثلاثة من طرازات أجهزة التكييف المنزلي عام 2020م.

	الطراز A	الطراز B	الطراز C
المصنع 1	700	1300	670
المصنع 2	650	1000	890
المصنع 3	480	900	540

	الطراز A	الطراز B	الطراز C
المصنع 1	850	1200	670
المصنع 2	540	860	530
المصنع 3	620	750	490

ضرب المصفوفات Matrix Multiplication

الدرس 3

إذا كانت $A_{5 \times 3}$ ، وكانت $B_{2 \times 3}$ ، وكانت $C_{3 \times 5}$ ، فأحدّ عمليات الضرب المُمكنة ممّا يأتي، ثمّ أجد رتبة المصفوفة الناتجة:

1 AB

2 AC

3 CA

4 BC

5 CB

إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -4 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ ، $D = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ ، فأجد كلاً ممّا يأتي (إنّ أمكن):

6 AB

7 BA

8 BC

9 CB

10 BD

11 $2A + 3BC$

12 A^2

13 A^3

14 $(CB)^2$

15 إذا كانت: $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ x & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -7 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$ ، فأجد قيمة كلّ من x ، و y .

16 أجد ناتج: $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$.

17 إذا كان: $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$ ، فأجد B^3 .

18 إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 6 \\ 18 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ، فأجد المصفوفة C ، بحيث يكون $A + C = BC$.

يتبع

ضرب المصفوفات Matrix Multiplication

الدرس
3

مبيعات: يُبين الجدول الأيمن قيمة مبيعات أحذية الرجال والنساء والأطفال (بالدنانير) لثلاثة مندوبي مبيعات، ويُبين الجدول الأيسر نسب العمولة القديمة والجديدة للمبيعات. أُجيب عن السؤالين التاليين اعتمادًا على المعلومات الواردة في هذين الجدولين:

	النسبة القديمة	النسبة الجديدة
أحذية الرجال	9%	9.5%
أحذية النساء	9%	10%
أحذية الأطفال	13%	12%

	أحذية الرجال	أحذية النساء	أحذية الأطفال
المندوب 1	1200	2300	900
المندوب 2	3100	2800	1100
المندوب 3	3700	2600	800

19 أجد المصفوفة التي تمثل ما يجنيه كل من المندوبين الثلاثة وفق النسبة الجديدة والنسبة القديمة.

20 أحدد المندوب الأكثر استفادة من تغيير نسب العمولة، ثم أبرر إجابتي.

أحدد إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبدًا، ثم أبرر إجابتي:

21 إذا أمكن إيجاد AB و BA ، فإن المصفوفة A والمصفوفة B مُربَّعتان.

22 إذا كان AB مصفوفة صفرية، فإن A مصفوفة صفرية، أو B مصفوفة صفرية.

الدرس 4

المُحدِّدات وقاعدة كرامر Determinants and Cramer's Rule

أجد قيمة كلٍّ من المُحدِّدات الآتية:

1 $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$

2 $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

3 $\begin{vmatrix} -5 & 10 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}$

4 $\begin{vmatrix} 7 & -3 & 1 \\ 8 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & 6 \end{vmatrix}$

5 $\begin{vmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -6 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

6 $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix}$

7 إذا كان: $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ ، فأجد قيمة كلٍّ من $|AB|$ و $|BA|$.

8 إذا كانت: $\begin{vmatrix} x & 8 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 9$ ، فأجد قيمة x .

9 إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ ، فأجد مُحدِّدة A^2 ، ثمَّ أُبيِّنُ علاقتها بمُحدِّدة A .

10 تُعطى معادلة المستقيم المارَّ بالنقطتين (x_1, y_1) , (x_2, y_2) بالقاعدة: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$. أستعمل هذه القاعدة لإيجاد

معادلة المستقيم المارَّ بالنقطتين $(-1, 3)$, $(2, -5)$.

يتبع

المُحدِّدات وقاعدة كريمر Determinants and Cramer's Rule

الدرس
4

أحلُّ كُلِّاً من أنظمة المعادلات الآتية باستخدام قاعدة كريمر:

11 $3x - 5y = 22$
 $2x + y = 6$

12 $3y + 5x = 7$
 $2x - 4y = 8$

13 $3x = y + 10$
 $4y = 6 + 5x$

14 حلَّت سلمى نظامًا من معادلتين خطيتين بالمتغيَّرين x ، و y باستعمال قاعدة كريمر، فوجدت أنَّ:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{D}, y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{D}$$

ما قيمة كلٍّ من x ، و y ؟

15 أجد مساحة المثلث الذي رؤوسه: $A(-2, 5)$ ، $B(7, 11)$ ، $C(1, 15)$ باستعمال المُحدِّدات.

16 **نقود:** يوجد في صندوق مُحاسب 75 ورقة نقد أردنية من فئة الدينار وخمسة الدينار وعشرة الدينار، تبلغ قيمتها الإجمالية JD 460. إذا كان عدد أوراق النقد من فئة خمسة الدينار يساوي 4 أمثال عدد أوراق النقد من فئة الدينار، فأجد عدد ما في الصندوق من أوراق النقد لكل فئة باستعمال قاعدة كريمر.

الدرس
5

النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة
المعادلات الخطية

Inverse Matrix and Systems of Linear Equations

أُبيّن إذا كانت كل مصفوفتين ممّا يأتي تُمثّل إحداهما نظيرًا ضربيًا للأخرى:

1 $A = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$

2 $F = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0.25 & -0.25 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

أُبيّن إذا كانت كل من المصفوفات الآتية مُنفردة أو غير مُنفردة، ثمّ أجد النظير الضربي لغير المُنفردة منها:

3 $M = \begin{bmatrix} 4 & -10 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

4 $N = \begin{bmatrix} -3 & -11 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

5 $R = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

أحلّ أنظمة المعادلات الآتية باستخدام النظير الضربي:

6 $\begin{cases} -2x + y = 13 \\ x - 2y = -11 \end{cases}$

7 $\begin{cases} 4x + 5y = 22 \\ 3x + 4y = 17 \end{cases}$

8 $\begin{cases} 3x - 8y = 34 \\ 2y - 4x - 28 = 0 \end{cases}$

9 أجد قيمة x التي تجعل المصفوفة: $\begin{bmatrix} x & 1 \\ 15 & x+2 \end{bmatrix}$ مُنفردة.

10 إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ، فأجد مُحدّدة A^{-1} ، ثمّ أبيّن العلاقة بين $|A|$ و $|A^{-1}|$.

يتبع

النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية Inverse Matrix and Systems of Linear Equations

الدرس
5

11 إذا كان A و B مصفوفتين مُربَّعتين من الرتبة 2×2 ، وكان: $AB = B^5 A$ ، وكان: $B^6 = I$ ، حيث I المصفوفة المُحايدة، فأُثبت أن: $B(AB) = A$.

12 إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ، وكان B مصفوفة مُربَّعة من الرتبة 2×2 ، حيث: $BA^2 = A$ ، فأجد المصفوفة B .

13 إذا كان: $B = \begin{bmatrix} 2 & a \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ ، حيث $a \neq 2$ ، فأجد قيمة a التي تجعل $B + B^{-1} = I$.

14 **تغذية:** تُخطَّط اختصاصية تغذية نظامًا غذائيًا للاعب كرة قدم، بحيث يتيح له استهلاك 3600 سعرة حرارية يوميًا؛ بأن يأكل 750 g من البروتينات والكربوهيدرات والدهون كل يوم. إذا كان الغرام الواحد لكل من البروتينات والكربوهيدرات يُزوّد الجسم بنحو 4 سعرات، وكان الغرام الواحد من الدهون يُزوّد الجسم بنحو 9 سعرات، وبلغت نسبة السعرات المُقرَّرة التي مصدرها البروتينات والدهون نحو 60%؛ فأكتب معادلة مصفوفية، ثمَّ أحلّها لإيجاد مقدار ما يتناوله هذا اللاعب من البروتينات والكربوهيدرات والدهون يوميًا.

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1 إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 15 & -8 & 0 \\ 9 & 22 & -4 \\ -3 & 6 & 12 \end{bmatrix}$ فإن $a_{21} + a_{32}$ يساوي:

a) 15 b) -12

c) 5 d) -2

2 إذا كانت $A_{3 \times 2}$ وكانت $B_{2 \times 4}$ وكانت $C_{3 \times 2}$ فإن العملية التي يمكن إيجادها هي:

a) $A + B$ b) $B + C$

c) $5B - 3C$ d) $(A+C)B$

3 إذا كانت: $\begin{bmatrix} 4 & x \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-y & 2 \\ 4 & z \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & x-z \end{bmatrix}$ فإن قيمة $(x + y + z)$ تساوي:

a) 10 b) 19

c) 21 d) 26

4 إذا كانت: $\begin{bmatrix} -8 & x \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ مصفوفة مُنفردة، فإن قيمة x تساوي:

a) -8 b) -12

c) 6 d) -26

5 إذا كان: $C = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 6 & -3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 9 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ فإن قيمة العنصر c_{23} تساوي:

a) 39 b) 22

c) 25 d) 27

6 إذا كانت $L_{3 \times 4}$ وكانت $M_{5 \times 3}$ وكانت $N_{2 \times 5}$ فإن رتبة المصفوفة T ، حيث: $T = NML$ هي:

a) 2×3 b) 3×5

c) 3×4 d) 2×4

إذا كان: $A = \begin{bmatrix} a-3 & -2 \\ 2 & a+2 \end{bmatrix}$ حيث a عدد ثابت، فأجب عن

الأسئلة الثلاثة الآتية تباعاً:

7 أجد مُحددة A بدلالة a .

8 أجد قيم a التي تجعل المصفوفة A مُنفردة.

9 أجد A^{-1} عندما $a = 3$.

إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -5 \\ 3 & 7 & 4 \end{bmatrix}$

فأجد كلاً مما يأتي $C = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -4 & 1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ (إن أمكن):

10 $C(B+D)$

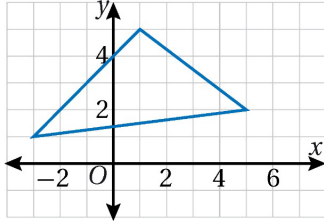
11 AB

12 $B+C$

13 $2B - 3C$

اختبار نهاية الوحدة

20 أجد مساحة المثلث الآتي باستعمال المُحدِّدات.



21 أحلُّ نظام المعادلات الآتي باستعمال قاعدة كرامر:

$$3x - 2y = 8$$

$$5x + 3y = 13$$

22 أحلُّ نظام المعادلات الآتي باستعمال النظير الضربي:

$$x - 5y = 14$$

$$3x - 8y = 28$$

23 إذا كان: $B = \begin{bmatrix} 2 & a \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ ، حيث a عدد ثابت

لا يساوي 2، وكان: $B + B^{-1} = I$ ، فأجد قيمة a .

24 **كيمياء:** لدى عائشة 3 محاليل حمضية، تركيز الحمض

في المحلول الأول 10%، وتركيزه في المحلول

الثاني 20%، وتركيزه في المحلول الثالث 40%.

أكتب معادلة مصفوفية تُمثِّل المسألة، ثمَّ أحلُّها لإيجاد

الكميات التي يتعيَّن على عائشة مزجها من المحاليل

الثلاثة للحصول على 100 mL من محلول حمضي

نسبة تركيزه 18%، علماً بأنَّ الكمية التي سُسْتُعمل

من المحلول الذي تركيزه 10% تساوي أربعة أمثال ما

سُسْتُعمل من المحلول الذي تركيزه 40%.

14 أجد: $\begin{vmatrix} 3 & -7 & 6 \\ 1 & 0 & 8 \\ -2 & 11 & 9 \end{vmatrix}$

15 يُبيِّن الجدول التالي توزيع سُكَّان إحدى البلدات (بالآلاف) بحسب فئات العمر والجنس. أنظِّم هذه البيانات في مصفوفة صفوفها فئات الأعمار، ثمَّ أحرِّد رتبته.

العمر	الذكور	الإناث
0 – 19	71	66
20 – 39	68	59
40 – 59	32	22
60 فأكثر	11	14

16 إذا كان: $A = \begin{bmatrix} x & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، فأجد قيمة x التي

$$AB = BA$$

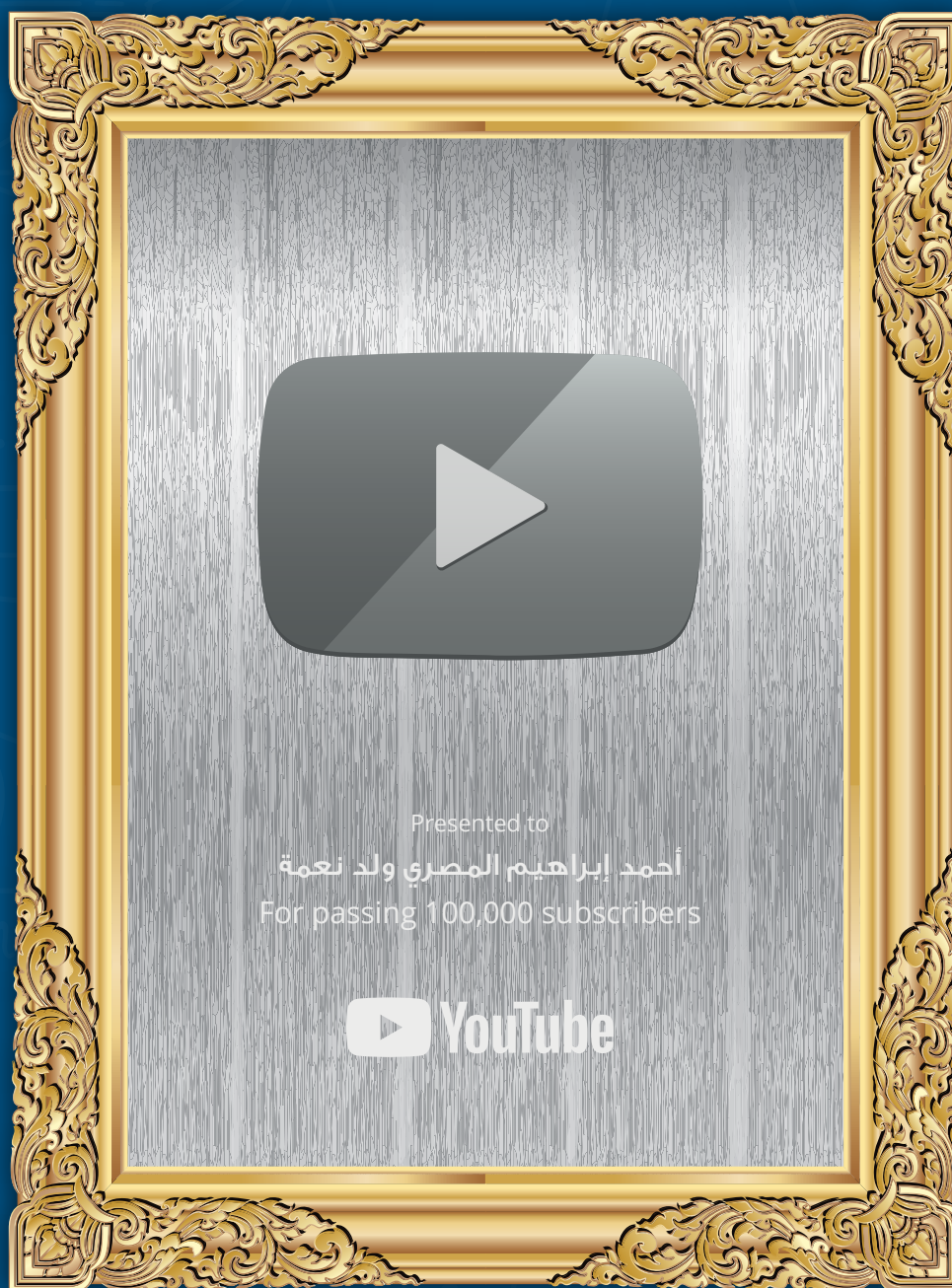
17 إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ ، فأجد قيمة كلِّ من الثابت k

$$A^2 + kI = hA$$

18 إذا كانت: $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

$$BA - 2C^2$$

19 أحلُّ المعادلة: $2X - \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$



انضمّ إلى أكثر من **197 ألف** متابع على قناتنا على اليوتيوب :

أحمد المصري

تابع معنا على مجموعة الفيسبوك

الرياضيات مع الأستاذ أحمد المصري

لدخول مجموعات الدّراسة أو لطلب البطاقة عبر واتساب **0785922035**