

اقتران كثيرات الحدود

الدرس
الأول

مثل

① $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 7$

② $g(x) = 8x + 1$

③ $h(x) = 9$

ما هو الاقتران كثير الحدود

هو اقتران تكون الأسس فيه أعداد صحيحة غير سالبة

مثل

① $7x^5$

② $\sqrt{3}x^3$

③ x

④ 8

حالة خاصة: الاقتران وحيد الحد

هو اقتران قاعدته ناتج ضرب عدد حقيقي (يسمى المعامل) في متغير أسه عدد صحيح غير سالب

الصورة العامة لكثير الحدود

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

حيث n : عدد صحيح غير سالب .

أعداد حقيقية تسمى معاملات حدود كثير الحدود. $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$

مثل

$$f(x) = \frac{5}{3}x^7 - 2x^2 + 1$$

المعامل الرئيسي

المعامل الرئيسي

هو العدد الحقيقي المضروب بأعلى درجة أسية في الاقتران كثير الحدود



$$f(x) = 2x^4 - x^3 + 3x^2 + 5x + 1$$

الصورة القياسية

يكون اقتران كثير الحدود بالصورة القياسية إذا كانت حدوده مكتوبة بترتيب تنازلي من أكبرها درجة الى أصغر درجة

كثير الحدود الصفري

هو كثير الحدود الذي جميع معاملاته أصفار ، وهو $f(x) = 0$ وليس له درجة ويمثله المحور x في المستوى الأحداثي

مثال 1

أحدد إذا كان كل مما يأتي كثير حدود أم لا . وفي حال كان كثير حدود أكتبه بالصورة القياسية. ثم أحدد المعامل الرئيس، والدرجة، والحد الثابت:

$$\textcircled{1} f(x) = -4 + 6x - 2x^3 + x^2$$

$$\textcircled{2} g(x) = 2x^2 + \frac{1}{x}$$

$$\textcircled{3} h(x) = \sqrt{x} + 7$$

$$\textcircled{4} k(x) = \frac{3x^2 - 5}{4} + 2x$$

أتحقق من فهمي

أحدد إذا كان كل مما يأتي كثير حدود أم لا . وفي حال كان كثير حدود أكتبه بالصورة القياسية. ثم أحدد المعامل الرئيس، والدرجة، والحد الثابت:

$$\textcircled{1} h(x) = 9 - 5x + \sqrt{2}x^5$$

$$\textcircled{2} f(x) = \frac{3x + 5}{x^2 + 2} + 2x$$

$$\textcircled{3} g(x) = 2x(3 - x)^3$$

$$\textcircled{4} r(x) = \frac{x^3}{6} - 7x^5 + 2\pi$$

ومداه (range)

هو مجموعة القيم التي يأخذها المتغير y

مجال (domain)

أي اقتران هو مجموعة القيم التي يأخذها المتغير x ،

لتمثيل الاقتران كثير الحدود $f(x)$ بيانياً، أكون جدول قيم أُحدِّد فيه قيم المتغير x ، وأحسب قيم $f(x)$ ، وأعين النقاط $(x, f(x))$ في المستوى الإحداثي، وأصل بينها بمنحنى متصل.

أتعلم

مجال كثير الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية، أو مجموعة جزئية منها تُحدد في نص السؤال، ومداه هو مجموعة الأعداد الحقيقية، أو مجموعة جزئية منها تُحدد من جدول قيم الاقتران أو من دراسة التمثيل البياني للاقتران.

مثال 2

أمثل بيانياً كل اقتران مما يأتي، محدداً مجاله ومداه:

① $f(x) = x^3 - 3x - 2, -3 \leq x \leq 3$

أتعلم

أجد أصفار الاقتران من التمثيل البياني بإيجاد مقاطعه من محور x .

② $f(x) = x^2 - 4x, -1 \leq x \leq 4$

أفكر

ما الفرق بين الفترة
 $[-4,5]$ والفترة $(-4,5)$ ؟

أتذكر

معادلة محور التماثل لمنحنى

الاقتران التربيعي $f(x) =$

$ax^2 + bx + c$ حيث $a \neq 0$

هي $x = -\frac{b}{2a}$ وإحداثيا رأسه

هما $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

أتحقق من فهمي

أمثل بيانيا كل اقتران مما يأتي، مُحدداً مجاله ومداه:

Ⓐ $f(x) = 2x^3 - 16, -3 \leq x \leq 3$

Ⓑ $f(x) = -0.5x^2 + 3x + 3.5, -3 \leq x \leq 9$

جمع كثيرات الحدود

لجمع كثيرات الحدود، أجمع الحدود المتشابهة التي لها الدرجة نفسها، وأجمع معاملاتها.

مثال 3

إذا كان $f(x) = 2x^2 - 5x^3 + 4x - 9$ ، $g(x) = 7x^3 + 6x + 4$ ، فأجد $f(x) + g(x)$.

أتحقق من فهمي

إذا كان $f(x) = 3x^2 + 8x^3 + 2x + 13$ ، $g(x) = -4x^3 + 6x^2 - 5$ ، فأجد $f(x) + g(x)$.

طرح كثيرات الحدود

- لإيجاد ناتج طرح اقترايين، أحول عملية الطرح إلى جمع النظير الجمعي للمطروح، ثم أجمع كما في المثال السابق.
- يُمكنني أن أجد ناتج جمع اقترايين باستعمال الطريقة العمودية، وذلك بترتيب الحدود المتشابهة بعضها تحت بعض، ثم جمع المعاملات.

أتعلم

النظير الجمعي للاقتران $f(x)$ هو $-f(x)$ ، وينتج من عكس إشارات معاملات حدود $f(x)$.

مثال 4

إذا كان $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$, $g(x) = 6x - 7x^2 - 8$ ، فأجد $f(x) - g(x)$

أتحقق من فهمي

إذا كان $f(x) = 5x^3 - 12x^2 + 3x + 20$, $g(x) = x^3 + 6x^2 - 14$ ، فأجد $g(x) - f(x)$

ضرب كثيرات الحدود

لضرب كثيرات الحدود، أستعمل خاصية توزيع الضرب على الجمع . يُمكنني أيضاً استعمال الطريقة العمودية.

مثال 5

أجد ناتج ضرب $f(x)$. $g(x)$ في كل مما يأتي

① $f(x) = 3x^3$, $g(x) = 2x^2 - 5x - 4$

$$\textcircled{2} f(x) = 4x^3 - 5x^2 + x - 5, g(x) = 4x^2 - 7$$

أتحقق من فهمي

أجد ناتج ضرب $g(x)$. $f(x)$ في كل مما يأتي

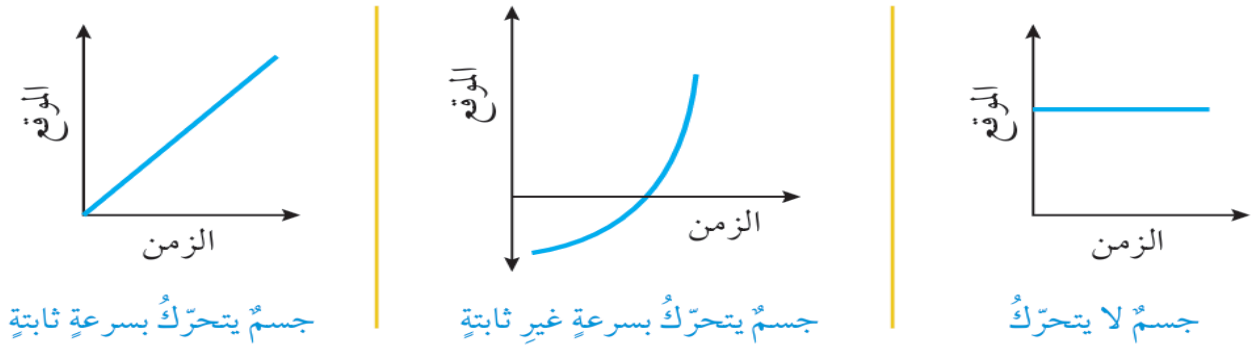
$$\textcircled{a} f(x) = 5x^2 + 4, g(x) = 7x + 6$$

$$\textcircled{b} f(x) = 2x^3 + x - 8, g(x) = 5x^2 + 4x$$

تطبيق فيزيائي: اقتران الموقع

إذا تحرك جسم في مسار مستقيم وعبرنا عن موقعه المتغير على ذلك المسار بالإحداثي (s) للنقطة التي يكون عندها الجسم، فإننا نحصل على اقتران يربط موقع الجسم $s(t)$ بالزمن (t) يُسمى اقتران الموقع (Position function)

إذا كانت سرعة الجسم ثابتة فإن اقتران الموقع يكون خطياً (منحناه مستقيم)، أما إذا كانت سرعته ليست ثابتة فإن اقتران الموقع لا يكون خطياً، فقد يكون كثير حدود مثلًا أو اقتراناً دائرياً. ويعني وجود قيمة سالبة لاقتران الموقع عند لحظة ما أن الجسم يقع في الجهة السالبة من نقطة الأصل عند تلك اللحظة.



أتعلم

إذا كان منحنى اقتران الموقع-الزمن ليس مستقيماً فإن ذلك لا ينفى أن الجسم يتحرك في مسار مستقيم، ذلك أن المنحنى لا يمثل المسار الذي يتحرك عليه الجسم بل إزاحته عن نقطة الأصل التي تتغير بمرور الزمن

6

مثال

يمثل الاقتران $s(t) = 3t^2 - 24t + 36$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s موقع الجسم بالأمتار بعد t ثانية

① أعدد موقع الجسم لحظة بدء الحركة

② أحدد موقع الجسم بعد 5 ثوانٍ من بدء الحركة

③ متى يكون الجسم عند نقطة الأصل؟

④ هل يعود الجسم إلى النقطة التي بدأ الحركة منها؟

أتحقق من فهمي

يمثل الاقتران $s(t) = t^2 - 7t^2 + 10t$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s موقع الجسم بالأمتار بعد t ثانية.

(a) أحدد موقع الجسم لحظة بدء الحركة

(b) أحدد موقع الجسم بعد 5 ثوانٍ من بدء الحركة

(c) متى يكون الجسم عند نقطة الأصل؟

(d) هل يعود الجسم إلى النقطة التي بدأ الحركة منها؟

أدرب وأحل المسائل

أحدد إذا كان كلٌّ مما يأتي كثير حدودٍ أم لا. وفي حال كان كثير حدودٍ أكتبه بالصورة القياسية، ثمَّ أحددُ المعامل الرئيس، والدرجة، والحد الثابت:

$$\textcircled{1} f(x) = 4 - x$$

$$\textcircled{2} g(x) = \frac{5x^2 + 2x}{x}$$

$$\textcircled{3} h(x) = 3x(4x - 7) + 2x - 12$$

$$\textcircled{4} L(x) = 3x^2 + 5.3x^3 - 2x$$

$$\textcircled{5} j(t) = \sqrt{7}t - 16t^2$$

$$\textcircled{6} k(x) = 5x^{\frac{3}{2}} + 2x - 1$$

$$\textcircled{7} f(x) = 13(2)^x + 6$$

$$\textcircled{8} f(y) = y^3(4 - y^2)^2$$

أمثل كل اقتران مما يأتي بيانياً، محدداً مجاله ومداه:

$$\textcircled{9} f(x) = x^2 - 3x - 4, -1 \leq x \leq 5$$

$$\textcircled{10} f(x) = -4x^2 + 8x + 3, 0 \leq x \leq 3$$

$$\textcircled{11} y = 2x^3 - 6x + 4, -2 \leq x \leq 3$$

$$\textcircled{12} y = 2x^2 - x^3 + 9x - 4, -3 \leq x \leq 4$$

إذا كان $f(x) = 2x + 1, g(x) = 5x^2 - 2x^3 + 4, h(x) = x^4 - 5x^2 + 3x - 6$ فأوجد كلاهما يأتي بالصورة القياسية:

$$\textcircled{13} h(x) + g(x)$$

$$\textcircled{14} g(x) - h(x)$$

$$\textcircled{15} f(x) \cdot h(x)$$

$$\textcircled{16} x(f(x)) + h(x)$$

$$\textcircled{17} (f(x))^2 - g(x)$$

$$\textcircled{18} h(x) - x(g(x))$$

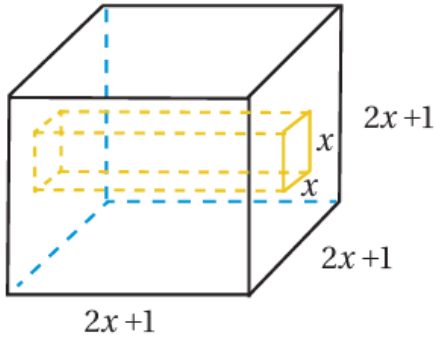
يمثل الاقتران $s(t) = t^3 - 3t^2 + 2t - 6$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s موقع الجسم بالأمتار بعد t ثانية.

19) أحدد موقع الجسم لحظة بدء الحركة

20) أحدد موقع الجسم بعد 4 ثوانٍ من بدء الحركة

21) متى يكون الجسم عند نقطة الأصل؟

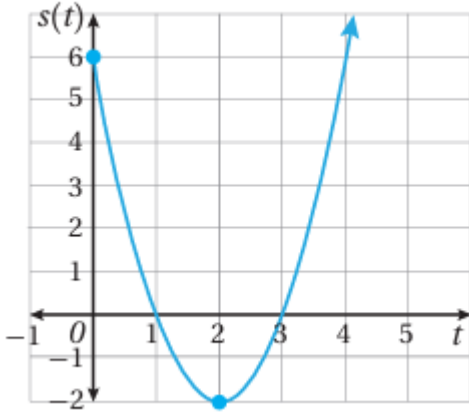
22) هل يعود الجسم إلى النقطة التي بدأ الحركة منها؟



23 هندسة: مكعب من الخشب، طول ضلعة $(2x + 1)cm$ ، حفر فيه تجويف مقطعه مربع، طول ضلعه $x cm$ ، وهو يمتد من أحد الأوجه إلى الوجه المقابل. أكتب بالصور القياسية الاقتران الذي يمثل حجم الجزء المتبقي من المكعب

مهارات التفكير العليا

تبرير: يظهر في الشكل المجاور منحنى اقتران الموقع لجسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار و t الزمن بالثواني. أستمعمل الشكل للإجابة عن الأسئلة الآتية مبرراً إجابتي:



24 ما الفترة (الفترة) الزمنية التي يكون فيها الجسم في الجهة الموجبة من نقطة الأصل؟

25 أحدد الموقع الابتدائي للجسم.

26 ما أبعد موقع للجسم عن نقطة الأصل وهو في الجهة السالبة منها؟

27 مسألة مفتوحة: أكتب كثيري حدود، أحدهما ذو حدين، والآخر ثلاثي الحدود، بحيث يكون ناتج ضربهما اقترانا ذا حدين.

28 تحد: أجدُ أصفار الاقتران: $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

29 تبرير: إذا كان f, g كثيري حدود، فأكتب العلاقة بين درجة كل منهما ودرجة كثير الحدود h الناتج من جمعهما، وطرحهما، وضربهما، مبرراً إجابتي.

قسمة كثيرات الحدود والاقترانات النسبية

الدرس
الثاني

إن قسمة كثير حدود على آخر تُشبه كثيراً عملية قسمة عددٍ كلي على آخر؛ إذ تتبع الخطوات نفسها في كلتا الحالتين. يُمكن قسمة كثير الحدود $f(x)$ على كثير الحدود $h(x) \neq 0$ إذا كانت درجة $f(x)$ أكبر من أو تساوي درجة $h(x)$ لقسمة كثير حدود على آخر. أكتب المقسوم والمقسوم عليه بالصورة القياسية، وإذا كانت إحدى قوى المتغير في المقسوم مفقودة، فإي أضيفها في موقعها، وأكتب معاملها 0، ثم أنفذ خطوات القسمة كما في المثال الآتي.

مثال 1

أجد ناتج قسمة $f(x) = 2x^3 + 24x - 15$ على $g(x) = x + 5$ ، وبقائها.

إرشاد تتوقف عملية قسمة كثيرات الحدود عندما تصبح درجة باقي القسمة أقل من درجة المقسوم عليه

أتذكر يمكن التحقق من صحة القسمة بضرب الناتج في المقسوم عليه، وإضافة الباقي. فإذا كانت النتيجة مساوية للمقسوم كان الحل صحيحاً

أتحقق من فهمي

أجد ناتج قسمة $f(x) = 4x^4 - 7x^3 + 12x - 25$ على $h(x) = x - 4$ ، وباقيها.

الاقتارات النسبية

هي اقتارات يمكن كتابتها بصورة

نسبية بين كثيري حدود، مثل $\frac{f(x)}{g(x)}$

نتيجة

عند قسمة كثير حدود على كثير حدود آخر تكون درجة ناتج القسمة مساوية للفرق بين درجتي المقسوم والمقسوم عليه

⚡ شرط أن: $g(x) \neq 0$. ومن الأمثلة عليها:

$$y = \frac{x + 4}{2x^3 - 5x^2 - 3x}, \quad h(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 9}, \quad q(x) = \frac{1}{x}$$

مجال الاقتران النسبي

هو مجموعة الأعداد الحقيقية باستثناء الأعداد التي تجعل المقام يساوي صفرًا (أصفار المقام)

مثال 2

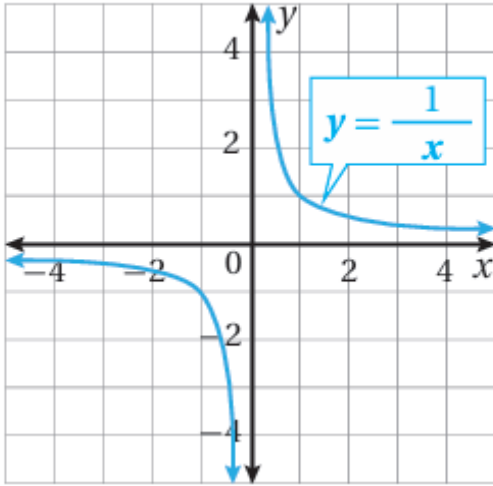
أجد مجال كل اقتران نسبي مما يأتي:

$$\textcircled{1} q(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 9}$$

أتذكر يمكن استعمال قاعدة

تحليل الفرق بين مربعين

$$\text{لتحليل } x^2 - 9 = 0$$



$$\textcircled{2} y = \frac{x + 4}{2x^3 - 5x^2 - 3x}$$

أفكر هل مجال الاقتران

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$$

مجال الاقتران $g(x) = x - 3$ ؟

أتحقق من فهمي

أجد مجال كل اقتران نسبي مما يأتي:

$$\textcircled{a} h(x) = \frac{x^3 + 8}{x^2 - 5x + 6}$$

$$\textcircled{b} y = \frac{x^2 - 4}{6x - 3x^2}$$

معظم الاقترانات النسبية منحنياتها غير متصلة، بمعنى: أنها تحتوي قفزات أو انقطاعات أو ثقوب، ويحدث ذلك عند أصفار المقام.

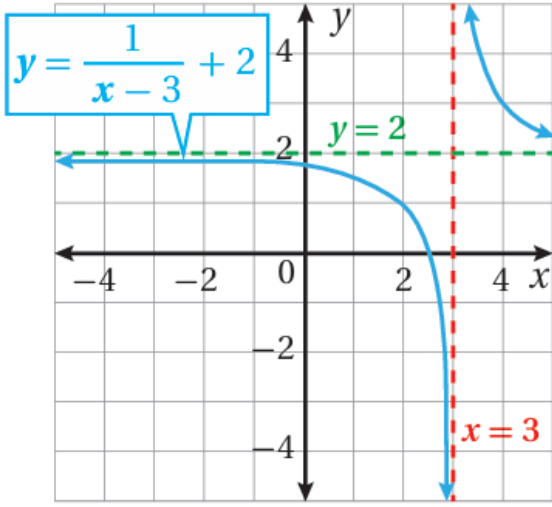
أحد المواقع التي لا يكون عندها منحنى الاقتران متصلاً هو

خط التقارب

وهو مستقيم يقترب منه منحنى الاقتران كلما ازدادت القيمة المطلقة لأحد المتغيرين x أو y .

في الشكل المجاور كل من المحور x والمحور y هو خط تقارب لمنحنى الاقتران $y = \frac{1}{x}$ ، وألاحظ أن منحنى الاقتران يقترب كثيراً من خطي التقارب، لكنه لا يلمسهما.

يسمى الاقتران $f(x) = \frac{1}{x}$ اقتران المقلوب وهو أبسط الاقترانات النسبية، ومنه تتولد اقترانات نسبية كثيرة.



بالنظر إلى منحنى الاقتران $y = \frac{1}{(x-3)} + 2$ في الشكل المجاور ألاحظ وجود تقارب رأسي عند صفر المقام $x = 3$ وخط تقارب أفقي عند $y = 2$ ، ويقودنا ذلك إلى القاعدة الآتية لتحديد خطوط التقارب الرأسية والأفقية.

مفهوم أساسي: خطوط التقارب الرأسية والأفقية

خط التقارب الرأسي يكون للاقتران النسبي الذي على صورة $f(x) = \frac{a}{(x-b)} + c$ خط تقارب رأسي عند صفر المقام هو المستقيم $x = b$

خط التقارب الأفقي: يكون للاقتران النسبي الذي على صورة $f(x) = \frac{a}{(x-b)} + c$ خط تقارب أفقي هو المستقيم $y = c$

مثال 3

أجد خطوط التقارب لكل اقتران مما يأتي:

① $f(x) = \frac{2}{x-3} + 5$

② $g(x) = \frac{7x}{x+4}$

أتحقق من فهمي

أجد خطوط التقارب لكل اقتران مما يأتي:

$$\text{a) } f(x) = 2 + \frac{9}{x+1}$$

$$\text{b) } h(x) = \frac{1}{x} - 3$$

$$\text{c) } j(x) = \frac{4x+11}{x-5}$$

• لتمثيل الاقترانات النسبية بيانياً؛ أجد خطوط التقارب، وأرسمها أولاً، ثم أكون جدول قيم باختيار قيم x على يمين خط التقارب الرأسي وعلى يساره، وأعين النقاط في المستوى الإحداثي.

مثال 4

أجد خطوط التقارب للاقتران $f(x) = \frac{5}{x-3} + 2$ وأمثله بيانياً، وأجد مجاله ومداه.

أتعلم إذا لم توجد عوامل مشتركة بين بسط ومقام الاقتران النسبي ومقامه، فإنه توجد خطوط تقارب رأسية عند أصفار مقامه جميعها

أتحقق من فهمي

أجد خطوط التقارب للاقتران $f(x) = \frac{3}{x+2} + 4$ وأمثله بيانياً، وأجد مجاله ومداه.

تحتوي منحنيات بعض الاقترانات النسبية فجوات (ثقوب) تعبر عن القيم التي لا يكون الاقتران معرفاً عندها.

مفهوم أساسي فجوات منحنى الاقتران النسبي

إذا كان $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ ، حيث $q(x) \neq 0$ ، وكان $x - c$ عاملاً مشتركاً لكل من $p(x)$ و $q(x)$ ، فإن منحنى $f(x)$ يحتوي فجوة عند $x = c$

مثال 5

أمثل الاقتران $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x+1}$ بيانياً

أتحقق من فهمي

أمثل كل من الاقترانين الآتيين بيانياً:

$$\text{a) } f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{x^4 + 3x^2}{x^2}$$

أتدرب وأحل المسائل

أجد ناتج القسمة والباقي في كل مما يأتي:

$$\text{① } (x^2 + 5x - 1) \div (x - 1)$$

$$\text{② } (3x^2 + 23x + 14) \div (x + 7)$$

③ $(x^3 - 3x^2 + 5x - 6) \div (x - 2)$

④ $(9x^3 - 9x^2 + 17x + 6) \div (3x - 1)$

⑤ $(-6x^3 + x^2 + 4) \div (2x - 3)$

⑥ $(8x^4 + 2x^3 - 14x^2 + 2) \div (4x^2 + x - 1)$

أجد مجال كل من الاقترانات الآتية:

⑦ $f(x) = \frac{3x - 6}{2x}$

⑧ $f(x) = \frac{2x - 8}{2x^2 - 3x + 1}$

⑨ $g(x) = \frac{2x^2 - 8}{x^2 + 9}$

أجد خطوط التقارب لكل اقتران مما يأتي، وأمثل بيانياً، وأجد مجاله، ومداه:

⑩ $f(x) = \frac{2}{x - 3}$

⑪ $h(x) = \frac{-2}{(x - 1)^2}$

⑫ $g(x) = \frac{4}{x + 2} - 1$

أمثل كلاً من الاقترانات الآتية بيانياً:

⑬ $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{x + 4}$

⑭ $f(x) = \frac{-x^2 + x^3}{x^3}$

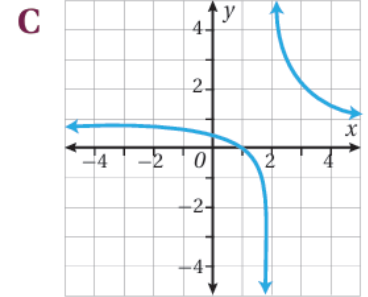
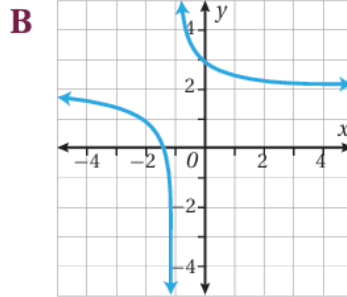
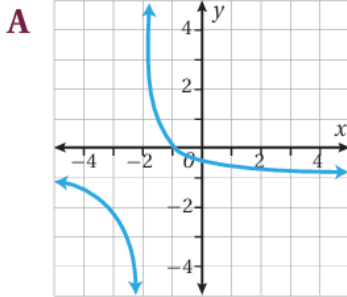
⑮ $f(x) = \frac{3x^4 + 6x^3 + 3x^2}{x^2 + 2x + 1}$

أعين لكل من الاقترانات النسبية الآتية رمز التمثيل البياني المناسب له:

⑯ $f(x) = \frac{1}{x + 1} + 2$

⑰ $h(x) = \frac{1}{x - 2} + 1$

⑱ $f(x) = \frac{1}{x + 2} - 1$



مهارات التفكير العليا

⑲ تبرير: مساحة ورقة مستطيلة تساوي $(3x^3 + 14x^2 + ax + 8)$ وحدات مربعة، وطولها يساوي $(x + 2)^2$ وحدة. أجد قيمة a مبرراً إجابتي.

⑳ أيها لا ينتمي: أحدد فيما يأتي الاقتران المختلف عن الاقترانات الثلاثة الأخرى، مبرراً إجابتي:

$$f(x) = \frac{3}{x + 5}$$

$$g(x) = \frac{5}{x + 2}$$

$$h(x) = \frac{9}{x^2 + 1}$$

$$l(x) = \frac{7}{x^2 - 9}$$

21 مسألة مفتوحة: أكتب قاعدة اقتتران نسبي يكون لتمثيله البياني خط تقارب أفقي هو $y = 3$ ، وخطا تقارب رأسيان هما: $x = -2, x = 7$

تركيب الاقترانات

الدرس
الثالث

تعلمتُ سابقاً أنه يُمكن استعمال أي اقترانين، مثل $f(x) = x^2, g(x) = 2x - 1$ ، لتكوين اقترانات جديدة، وذلك بإجراء عمليات جمع، أو طرح، أو ضرب، أو قسمة عليهما كما في الأمثلة الآتية:

$$(f + g)(x) = x^2 + 2x - 1$$

$$(f \cdot g)(x) = x^2(2x - 1)$$

$$(f - g)(x) = x^2 - 2x + 1$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{2x - 1}$$

ويمكن أيضاً تكوين اقتران جديد من الاقترانين f و g عن طريق دمجهما، بحيث تكونُ مخرجة أحدهما مدخلةً للآخر.

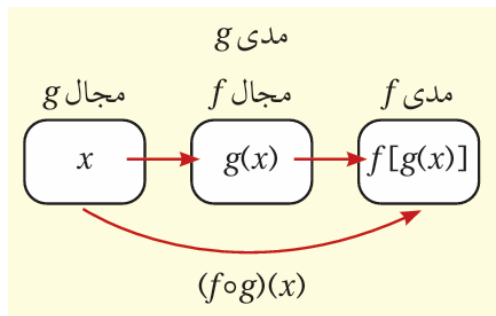
وتُسمى عملية الدمج هذه تركيب الاقترانات (functions composition)، ويُسمى الاقتران الناتج الاقتران المُركَّب (composite function).

يُمكن تركيب الاقترانين مثل $f(x), g(x)$ بطريقتين، هما:

1 تطبيق g أولاً، ثم تطبيق f على نتيجة g ، ويرمز إلى ذلك بالرمز $(f \circ g)$

2 تطبيق f أولاً، ثم تطبيق g على نتيجة f ، ويرمز إلى ذلك بالرمز $(g \circ f)$

مفهوم أساسي تركيب الاقترانات



إذا كان $f(x), g(x)$ اقترانين، وكان مدى $g(x)$ يقع ضمن مجال $f(x)$ فإن الاقتران المركب $(f \circ g)(x)$ يعطي كما يأتي:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

مثال 1

إذا كان $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 4$ ، فأجد:

① $(g \circ f)(3)$

② $(g \circ f)(-2)$

③ $(f \circ g)(5)$

أتحقق من فهمي

إذا كان $h(x) = \sqrt{x}$, $j(x) = 2x + 1$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

a $(h \circ j)(4)$

b $(j \circ h)(4)$

c $(h \circ h)(16)$

d $(j \circ j)(-8)$

يمكن إيجاد قاعدة الاقتران المركب بدلالة المتغير x ، ثم حساب قيمة الاقتران المركب عند أي قيمة عددية معطاة.

مثال 2

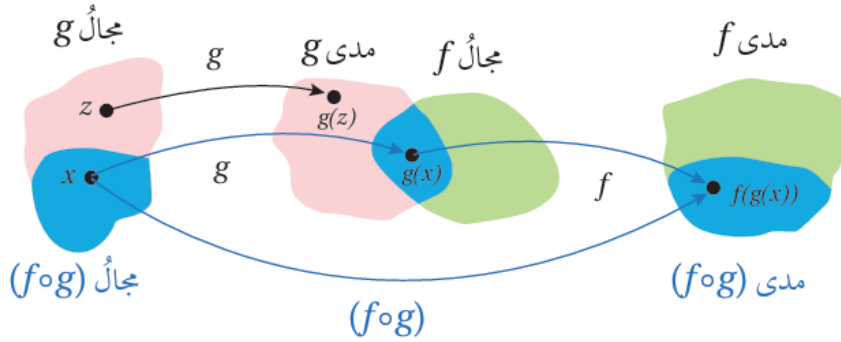
إذا كان $f(x) = 3x + 5$, $g(x) = 2x^2 - 6$ فأجد قاعدة كل من: $(f \circ g)(x)$ و $(g \circ f)(x)$. ثم أجد $(f \circ g)(-2)$ و $(g \circ f)(0)$.

أتحقق من فهمي

إذا كان $f(x) = x^2 + 4x$, $g(x) = 2 - 3x$ فأجد قاعدة كل من: $(f \circ g)(x)$ و $(g \circ f)(x)$. ثم أجد $(f \circ g)(3)$ و $(g \circ f)(-1)$.

مجال الاقتران المركب

• يتكون مجال $(f \circ g)(x)$ من مجموعة قيم x من مجال g التي تكون قيم $g(x)$ لها موجودة في مجال f . ولذلك تستثنى من مجال $(f \circ g)(x)$ قيم x التي لا يكون الاقتران g معرفاً عندها (ليست ضمن مجال g)، وقيم x التي لا يكون $f(g(x))$ معرفاً عندها ($g(x)$ ليست ضمن مجال f).



3 مثال

إذا كان $f(x) = \frac{6}{x-2}$ ، $g(x) = \frac{9}{x-3}$ فأوجد مجال $(f \circ g)(x)$.

أتحقق من فهمي

أجد مجال $(g \circ f)(x)$ للاقتارين في المثال 3 أعلاه.

يمكن النظر إلى كثير من الاقترانات بوصفها اقترانات مركبة، وإيجاد اقتارين بسيطين يكافئ تركيبهما الاقتران المركب، عندئذ يكون الاقترانان البسيطان مركبتي الاقتران المركب

فمثلاً، يمكن اعتبار الاقتران $f(x) = \sqrt{4x^2 + 9}$ اقترانا مركبا، ومركبناه هما:

$$f(x) = (h \circ g)(x) \text{ ويكون } h(x) = \sqrt{x}, g(x) = 4x^2 + 9$$

مثال 4

أجد الاقترانين $f(x)$ و $g(x)$ بحيث يمكن التعبير عن كل من الاقترانين الآتيين بالصورة $h(x) = f(g(x))$

$$\textcircled{1} h(x) = \frac{1}{x+3}$$

$$\textcircled{2} h(x) = (2 + x^2)^{10}$$

أتحقق من فهمي

أجد الاقترانين $f(x)$ و $g(x)$ ، بحيث يمكن التعبير عن كل من الاقترانين الآتين بالصورة $h(x) = f(g(x))$

Ⓐ $h(x) = 4x^2 - 1$

Ⓑ $h(x) = \frac{2}{(x+2)^2} + 5$

يمكن استعمال فكرة الاقترانات المركبة في مواقف حياتية كثيرة، مثل: التجارة، والصناعة، وغيرها.

مثال 5

صناعة: وجد مدير مصنع للأثاث أن تكلفة إنتاج q من خزانات الكتب في فترة العمل الصباحية بالدينار هي: $C(q) = q^2 + 2q + 800$. إذا كان عدد خزانات الكتب التي يمكن إنتاجها في t ساعة في الفترة الصباحية هي: $q(t) = 20t, 0 \leq t \leq 5$. فما تكلفة الإنتاج بدلالة t ؟ كم ديناراً تكلفة الإنتاج في نهاية ساعة العمل الرابعة؟

أتحقق من فهمي

قياس: يُحوّل الاقتران $C(F) = \frac{5}{9}(F - 32)$ درجات الحرارة من المقياس الفهرنهايتي F إلى مقياس سيلسيوس C . ويحول الاقتران $K(C) = C + 273$ درجات الحرارة من مقياس سيلسيوس إلى مقياس كلفن K . أكتب الاقتران الذي يُحوّل درجة الحرارة من المقياس الفهرنهايتي إلى مقياس كلفن، ثم أجد درجة الحرارة على مقياس كلفن التي تُقابل 86 فهرنهايتية.

معلومة: الكلفن وحدة لقياس درجة الحرارة، اعتمدت في النظام الدولي، ورمز إليها بالرمز (K) . وقد سميت بهذا الاسم نسبة إلى الفيزيائي اللورد كلفن.

(أدرب وأحل المسائل)

إذا كان $f(x) = x + 7, g(x) = \frac{x}{2}$ فأجد كلاهما يأتي:

① $(f \circ g)(4)$ ② $(g \circ f)(4)$ ③ $(g \circ g)(-2)$ ④ $(f \circ f)(3)$

إذا كان $c(x) = x^3, d(x) = 2x - 3$ فأجد كلاهما يأتي:

⑤ $(c \circ d)(3)$ ⑥ $(d \circ c)(5)$ ⑦ $(c \circ d)(x)$ ⑧ $(d \circ c)(x)$

أجد مجال $(f \circ g)(x)$ في كل مما يأتي:

⑨ $f(x) = \frac{2x}{x-3}, g(x) = \frac{1}{x-5}$ ⑩ $f(x) = \frac{1}{2x-2}, g(x) = \frac{5}{x+7}$

⑪ إذا كان $a(x) = x + 4, b(x) = x - 7$ فأثبت أن $(a \circ b)(x) = (b \circ a)(x)$

⑫ إذا كان $f(x) = 2^x, g(x) = 3x + 4$ فأجد $(f \circ g)(x)$ ، ثم أجد قيمة $(f \circ g)(-3)$

⑬ إذا كان $f(x) = \frac{1}{x-4}, g(x) = 2x - 10$ فأجد $(g \circ f)(x)$ بصورة كسر واحد، ثم أعيّن مجاله.

إذا كان $f(x) = x + 1, g(x) = x^2 - 7$ فأعبر عن كل مما يأتي بصورة اقتران مركب، معتمداً
الاقترانين f, g :

⑭ $x^2 - 6$ ⑮ $x^2 + 2x - 6$

أجد اقترانين $f(x)$ و $g(x)$ ، بحيث يمكن التعبير عن كل من الاقترانين الآتين بالصورة $h(x) = f(g(x))$

⑯ $h(x) = \frac{4}{3 - \sqrt{4 + x^2}}$ ⑰ $h(x) = \left(\frac{1}{2x-3}\right)^3$

⑱ إذا كان $f(x) = \sqrt{x-2}, x \geq 2, g(x) = \frac{2}{3-x}, x > 3$ فهل يمكن تكوين $(f \circ g)(x)$ ؟ أبرر إجابتي

يعطى عدد خلايا البكتريا في أحد الأطعمة المبردة في الثلجة بالاقتران:

حيث T درجة حرارة الطعام. عند إخراج الطعام من الثلجة
تعطي درجة حرارته بالاقتران: $T(t) = 5t + 1.5$ ، حيث t الزمن بالساعات:

⑲ أكتب الاقتران: $(N \circ T)(t)$.

⑳ أجد الزمن الذي يصل عنده عدد خلايا البكتريا إلى 6752 خلية، مقرباً إجابتي إلى منزلتين عشريتين.

21 إذا كان $f(x) = ax + b, a > 0$ وكان $(f \circ f)(x) = 16x - 15$ ، فأجد قيمة كل من a و b .

22 أجد $(f \circ g \circ h)(x)$ في أبسط صورة، علماً بأن: $f(x) = x^2 + 1, g(x) = \frac{1}{x}, h(x) = x + 3$.

مهارات التفكير العليا

23 أكتشف الخطأ: وجدت كل من هدى ووفاء ناتج $(f \circ g)(x)$ ، حيث:

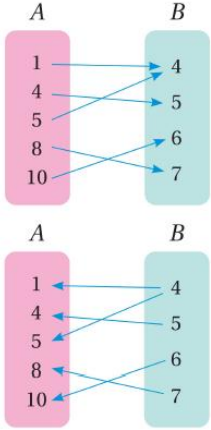
$f(x) = x^2 - 6x - 5, g(x) = x^2 + 5$ أحدد إذا كانت إجابة أي منهما صحيحة. مبرراً إجابتي.

24 مسألة مفتوحة: أكتب اقترايين f, g بحيث يكون $(f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 7$.

25 تحد: إذا كان $f(x) = \frac{1}{x-3}; g(x) = \frac{1}{x+2}$ ، فما قاعدة $(f \circ g)(x)$ ؟ ما مجاله؟

26 تحد: إذا كان $f(x) = \frac{2x-2}{x-4}$ وكان $g(x) = \frac{2x-1}{3}$ ، فأحل المعادلة $(f \circ g)(x) = -4$.

الاقتران العكسي

الدرس
الرابع

تعلّمنا سابقاً أنّ العلاقة تربط بين مجموعتين من العناصر، وأنّ إحداهما تُسمى المجال، والأخرى تسمى المدى. وبالنظر إلى العلاقة الممثلة في المخطط السهمي المجاور، ألاحظ أنّ المجال هو $A = \{1,4,5,8,10\}$ والمدى هو $B = \{4,5,6,7\}$.

عند عكس اتجاه الأسهم لترتبط عناصر B بعناصر A تنتج علاقة عكسية مجالها B ومداه A .

مثال 1

تمثل الأزواج المرتبة للعلاقة $\{(1,5), (2,3), (-2,1), (-3,3)\}$ إحداثيات رؤوس المستطيل $ABCD$. أجدُ العلاقة العكسية، ثمّ أمثل بيانياً العلاقة والعلاقة العكسية على المستوى الإحداثي نفسه.

أتحقق من فهمي

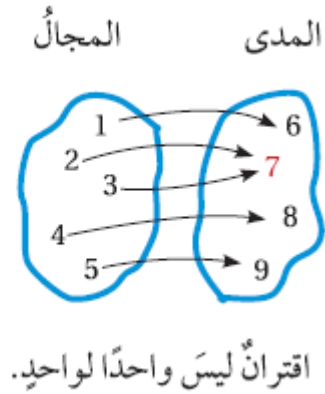
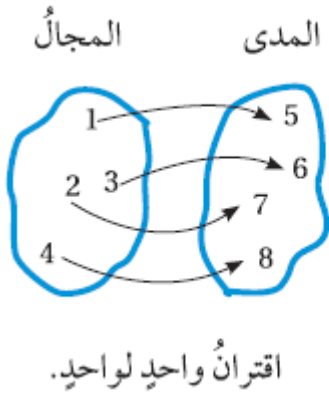
تمثل الأزواج المرتبة للعلاقة $\{(4,3), (-4,3), (-3,1)\}$ إحداثيات رؤوس المثلث ABC . أجدُ العلاقة العكسية، ثمّ أمثل بيانياً العلاقة والعلاقة العكسية على المستوى الإحداثي نفسه.

رموز رياضية: يقرأ الرمز $f^{-1}(x)$ الاقتران العكسي للاقتران $f(x)$.

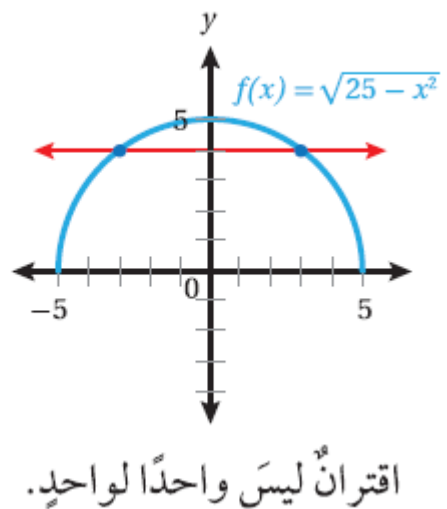
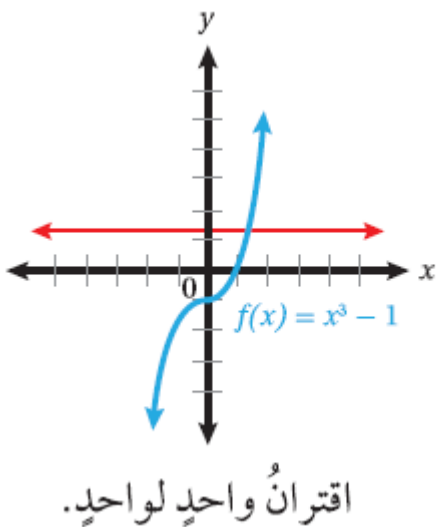
الاقترانات

هي نوع خاص من العلاقات؛ لأن لها خاصية لا تحققها جميع العلاقات؛ فهي تربط كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى وبما أن كل اقتران هو علاقة فإِنَّهُ يُمكنُ إيجاد علاقة عكسية للاقتران (معكوس الاقتران). فإذا كان المعكوس اقتراناً أيضاً سُمِّي اقتراناً عكسياً. ويُرمز إلى الاقتران العكسي للاقتران $f(x)$ بالرمز $f^{-1}(x)$.

❖ يُمكن تحديد إذا كان معكوس الاقتران $f(x)$ يمثل اقتراناً أم لا بالنظر إلى $f(x)$ نفسه؛ فإذا ارتبط كل عنصر في المدى بعنصر واحد فقط في المجال كان المعكوس اقتراناً. عندئذٍ يُسمَّى $f(x)$ اقتراناً واحداً لوحد

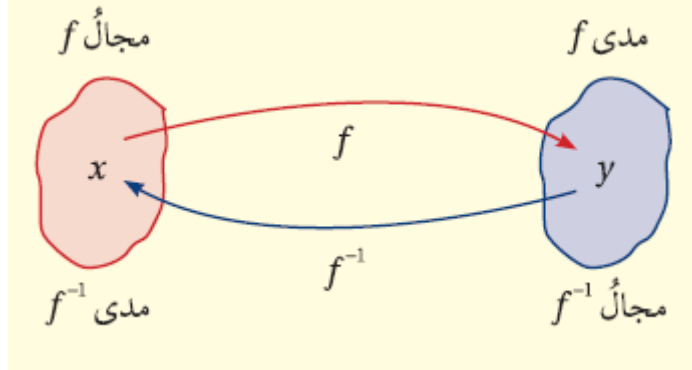


❖ يُمكن أيضاً استعمال طريقة تُسمى اختبار الخط الأفقي (horizontal line test)؛ للتحقق من أن الاقتران هو واحد لواحد، وذلك برسم أي خط أفقي، والتأكد أنه لا يقطع منحنى $f(x)$ في أكثر من نقطة.



مفهوم أساسي الاقتران العكسي

لأي اقتران $f(x)$ ، يوجد اقتران عكسي $f^{-1}(x)$ إذا وفقط إذا كان $f(x)$ اقتران واحد لواحد، عندئذ يكون مجال $f(x)$ هو مدى $f^{-1}(x)$ ، ومدى $f(x)$ هو مجال $f^{-1}(x)$.



يُمكن إيجاد الاقتران العكسي للاقتران المكتوب بصورة معادلة بالتبديل بين x و y في قاعدة الاقتران.

مثال 2

أجد الاقتران العكسي $f^{-1}(x)$ و لكل اقتران مما يأتي :

① $f(x) = 4(x - 5)$

② $f(x) = 3x^3 - 4, x \geq 0$

أتحقق من فهمي

أجد الاقتران العكسي لكل من الاقترانين الآتيين:

a) $h(x) = 7x + 5$

b) $g(x) = x^2 + 2, x \geq 0$

من خصائص أي اقترايين متعاكسين أن كلا منهما يعكس أثر الآخر؛ لذا ينتج من تركيبهما الاقتران الذي يُبقي كل عنصر في مجالها على حاله، وهو الاقتران المحايد الذي يربط كل عنصر بنفسه، وقاعدته هي: $f(x) = x$

نتيجة

يكون $f^{-1}(x)$ الاقتران العكسي للاقتران $f(x)$ ، إذا وفقط إذا كان: $(f \circ f^{-1})(x) = x$ لجميع قيم x في مجال $f^{-1}(x)$ و $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ لجميع قيم x في مجال $f(x)$.

إرشاد تعني جملة (إذا وفقط إذا) أن العبارة صحيحة في الاتجاهين

تستعمل النتيجة السابقة لإثبات أن كلا من اقترايين معلومين هو اقتران عكسي للآخر، وللتحقق من صحة الحل عند إيجاد الاقتران العكسي.

مثال 3

أثبت أن كلا من الاقترانين $f(x) = \frac{x+5}{3}$ ، $g(x) = 3x - 5$ هو اقتران عكسي للآخر بإيجاد $(f \circ g)(x)$ ، و $(g \circ f)(x)$.

أتحقق من فهمي

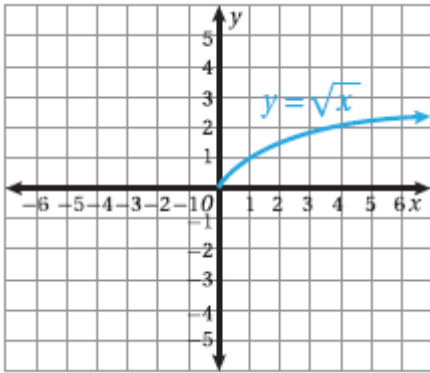
أثبت أن كلا من الاقترانين $f(x) = 4x - 8$ و $g(x) = \frac{x}{4} + 2$ هو اقتران عكسي للآخر.

أتعلم يمكنني أن أمثل الاقتران الجذري بيانياً بإنشاء جدول قيم أفترضها للمتغير x من مجال الاقتران، وأعوضها في قاعدة الاقتران لأجد قيم y ، وأعين النقاط في المستوى الإحداثي، وأرسم المنحنى الذي يمر بها

نتج في المثال الثاني الاقتران العكسي $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+4}{3}}$ يحوي جذراً تربيعياً لمقدار جبري، وهو نوع خاص من الاقترانات يُسمى الاقتران الجذري (radical function)، مثل:

$$f(x) = \sqrt{5 + x^2} \quad f(x) = \sqrt[3]{\frac{x + 12}{8}}$$

$$f(x) = \sqrt[4]{\frac{1}{x}} \quad f(x) = \frac{\sqrt{x - x^3}}{\sqrt[3]{1 - x}}$$



إذا كان دليل الجذر فردياً مثل $\sqrt[3]{x}$ ، $\sqrt[5]{x}$ كان مجال الاقتران الجذري جميع الأعداد الحقيقية. ومداه جميع الأعداد الحقيقية. أما إذا كان دليله زوجياً مثل \sqrt{x} ، $\sqrt[4]{x}$ فإن مجاله يكون مجموعة الأعداد التي تجعل المقدار تحت رمز الجذر عدداً غير سالب؛ لأن الجذور الزوجية للأعداد السالبة ليست حقيقية، ويكون مداه مجموعة من الأعداد الحقيقية غير السالبة. فمثلاً $f(x) = \sqrt{x}$ مجاله $x \geq 0$ ومداه $y \geq 0$ وتمثيله البياني كما في الشكل الآتي:

مثال 4

أجد مجال الاقتران $f(x) = \sqrt{2x - 6}$ ومداه. ثم أجد الاقتران العكسي له.

أذكر

عمليات الجمع والطرح، والضرب في عدد موجب لا تغير اتجاه رمز المتباينة أما الضرب في عدد سالب فيعكس اتجاه رمز المتباينة
 مجال الاقتران العكسي $f^{-1}(x)$ و هو مدى الاقتران f

أتحقق من فهمي

أجد مجال $g(x) = \sqrt{3x + 12} - 2$ ومداه، ثم أجدُ الاقتران العكسي له.

تتطلب بعض المسائل الحياتية استعمال مفهوم الاقتران العكسي لحلها. فإذا عُلمَ طول نصف قطر كرة أمكن إيجاد حجمها بالتعويض المباشر في قانون حساب حجم الكرة: $V(r) = \frac{4}{3}r^3\pi$. ولكن إذا عُلمَ الحجم، وطلبَ إيجاد طول نصف القطر، فيجب تغيير الصيغة الخاصة بإيجاد الحجم V إلى صيغة أخرى لإيجاد r ، وهنا يبرز مفهوم الاقتران العكسي.

مثال 5

فيزياء: سقط جسم ساكن من ارتفاع $200m$ عن سطح الأرض، فكان موقعه s ، بالنسبة إلى الأرض بالأمتار بعد t ثانية من سقوطه يعطى بالاقتران $s(t) = 200 - 4.9t^2$. أعبّر عن الزمن t بصورة اقتران بدلالة الموقع s ، ثم أجدُ الزمن الذي يكون عنده موقع الجسم m 50 فقط .

أتحقق من فهمي

يرتبط محيط الرأس C للطفل بطوله H (كلا القياسين بالسنتيمتر) عن طريق الاقتران:

$$H(C) = 2.15C - 26.75$$

Ⓐ أكتب اقتراناً يُعبر عن محيط الرأس C بدلالة طول الطفل H .

Ⓑ أجد محيط رأس طفل طوله 66 cm

أُتدرب وأحل المسائل

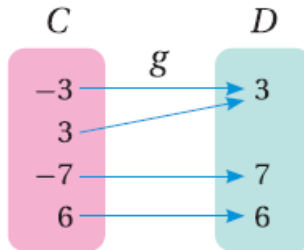
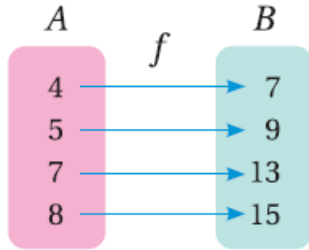
أحدد الاقتران الذي له اقتران عكسي في كل مما يأتي ، مبرراً إجابتي، ثم أكتب الاقتران العكسي (إن وُجد):

① $f = \{(2,6), (-3,6), (4,9), (1,10)\}$

② $h = \{(0,0), (1,1), (2,16), (3,81)\}$

③

④



إذا كان $f(x) = 3\left(\frac{x}{2} + 4\right)$ ، فأجد قيمة كل مما يأتي:

⑤ $f(-2)$

⑥ $f(4)$

⑦ $f^{-1}(9)$

⑧ $f^{-1}(18)$

أجد الاقتران العكسي لكل من الاقترانات الآتية:

⑨ $f(x) = x + 7$

⑩ $f(x) = 8x$

⑪ $f(x) = \frac{x}{2} + 6$

⑫ $f(x) = \frac{3x - 6}{5}$

⑬ $f(x) = 4x^3$

⑭ $g(x) = 4 + \sqrt{6 - 3x}, x \leq 2$

⑮ $g(x) = \frac{8 - 3x}{5x}, x \neq 0$

⑯ $j(x) = (x - 2)^2 + 4, x \geq 2$

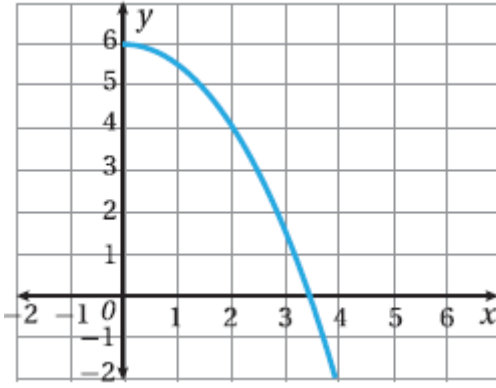
⑰ أثبت أن كلا من الاقترانين $f(x), g(x)$ هو اقتران عكسي للآخر :

$$f(x) = (x + 3)^2 + 2, x \geq -3, g(x) = -3 + \sqrt{x - 2}, x \geq 2$$

⑱ أثبت أن $f(x) = \frac{x}{x-1}, x \neq 1$ هو اقتران عكسي لنفسه.

⑲ صناعة : إذا كان $C(x)$ يُمثل التكلفة C بالدنانير لإنتاج x وحدة من مصابيح الإنارة، فماذا يمثل المقدار $C^{-1}(23000)$ ؟





20) أرسم منحنى الاقتران العكسي للاقتران f المجاور في المستوى الإحداثي نفسه، معينا المجال والمدى لكل من f و f^{-1} .

21) أجد الاقتران العكسي للاقتران:

$f(x) = x^2 - 2x + 5, -3 \leq x \leq 1$ ، ثم أمثل $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ بيانيا في المستوى الإحداثي نفسه.

(إرشاد: أكتب $f(x)$ بصورة $(x + b)^2 + c$ باستعمال إكمال المربع.)

22) كيمياء: في دورق 100 mL من أحد المحاليل، منها 25 mL من حامض الهيدروكلوريك. إذا أضيف إلى الدورق $n \text{ mL}$ من محلول مشابه، تركيز الحامض فيه 60% ، فإن تركيز الحامض في الدورق يُعطى بالاقتران: $C(n) = \frac{25+0.6n}{100+n}$. أعبّر عن n بصورة اقتران بدلالة التركيز C ، ثم أجد عدد المليلترات n التي يجب إضافتها ليصبح تركيز الحامض في الدورق 50% .

23) تُعطى مساحة السطح الكلية A للأسطوانة التي نصف قطر قاعدتها، وارتفاعها 40 cm بالاقتران:

$A(r) = 2\pi r^2 + 80\pi r$. أعبّر عن نصف القطر r بصورة اقتران بدلالة المساحة A ، ثم أجد طول نصف قطر قاعدة أسطوانة مساحة سطحها الكلية 2000 cm^2 .

24) أجد الاقتران العكسي للاقتران $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ثم أمثل $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ بيانيا في المستوى الإحداثي نفسه.

مهارات التفكير العليا

25) تبرير: إذا كان للاقتران $f(x)$ اقتران عكسي، وكان له صفر عندما $x = 4$ ، فما الذي يُمكن استنتاجه عن منحنى $f^{-1}(x)$ ؟

26) مسألة مفتوحة: أكتب قاعدة اقتران واحد لواحد والاقتران العكسي له، ثم أثبت أن كلا منهما اقتران عكسي للأخر.

27) تحد: إذا كان $f(x) = x^2 + 3$ ، $g(x) = 5x - 1$ و $x > 0$ ، فأحل المعادلة

$$(f \circ g)(x) = g^{-1}(34).$$

المتاليات

الدرس
الخامس

تعد المتتالية (sequence) اقترانا مجاله مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة، أو مجموعة جزئية منها، ومداه مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.

مراجعة مفهوم: المتتالية

المتتالية

هي مجموعة من الأعداد تتبع ترتيبا معيناً، ويُسمى كل عددٍ فيها حداً

مثال 1

أجد الحدود الثلاثة التالية لكل متتالية مما يأتي:

① 2,5,8,11, ...

② 3,6,12,24, ...

③ 80,73,66,59, ...

④ $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots$

أتحقق من فهمي

أجد الحدود الثلاثة التالية لكل متتالية مما يأتي:

Ⓐ $\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}, \dots$

Ⓑ 5, 10, 20, 40, ...

Ⓒ 150, 141, 132, 123, ...

Ⓓ 400, 200, 100, 50, ...

تعلمت في صفوف سابقة الحد العام ($n^{\text{th}} \text{ term}$) لمتتالية، الذي يمثل العلاقة بين أي حد ورتبته (n)، ويرمز إليه بالرمز $T(n)$. يُسهل الحد العام إيجاد أي حد في المتتالية باستعمال رتبته. مثل الحد الذي رتبته خمسون مثلاً. ويُمكن تصنيف المتتالية اعتماداً على حدها العام إلى خطية، وتربيعية، وتكعيبية، وغير ذلك.

2

مثال

أبين إذا كان المقدار الجبري المعطى بجانب كل متتالية مما يأتي يمثل حداً عاماً لها أم لا، ثم أصنّف المتتاليات إلى خطية، أو تربيعية، أو تكعيبية، ثم أجد الحد الخامس والسبعين في كل منها :

① $4, 7, 10, 13, \dots, 3n + 1$

② $4, 7, 12, 19, \dots, n^2 + 3$

$$\textcircled{3} 2, 9, 28, 65, \dots, n^3 + 1$$

أتحقق من فهمي

أبين إذا كان المقدار الجبري المعطى بجانب كل متتالية مما يأتي يُمثل حدا عاما لها أم لا. ثم أصنف المتتاليات إلى خطية، أو تربيعية، أو تكعيبية. ثم أجد الحد الخامس والسبعين في كل منها :

$$\textcircled{a} 1, 3, 5, 7, \dots, 2n - 1$$

$$\textcircled{b} 0, 3, 8, 15, \dots, n^2 - 1$$

$$\textcircled{c} 1.5, 8.5, 27.5, 64.5, \dots, n^3 + 0.5$$

يمكن إيجاد الحد العام للمتتاليات الخطية والتربيعية والتكعيبة بملاحظة العلاقة بين الحدود ورتبها.

3

مثال

أجدُ الحد العام لكل متتالية مما يأتي:

① 15,12,19,26,33, ...

② 5,8,13,20,29, ...

③ 0,7,26,63,124, ...

أتحقق من فهمي

أجدُ الحد العام لكل متتالية مما يأتي:

Ⓐ 8,15,22,29,36, ...

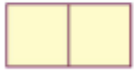
Ⓑ 4,7,12,19,28, ...

Ⓒ -1,6,25,62,123, ...

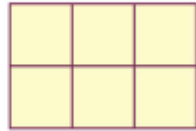
تظهر المتتاليات أيضاً في كثير من الأنماط الهندسية.

مثال 4

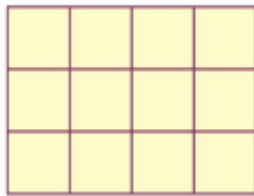
في ما يأتي نمط هندسي يُمثل عدد المربعات في نماذج متتالية . أجدُ الحد العام لهذه المتتالية.



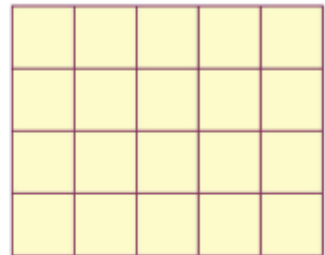
النموذج (1).



النموذج (2).



النموذج (3).



النموذج (4).

أتحقق من فهمي

في ما يأتي نمط هندسي يُمثل أعواد الثقاب في نماذجه متتالية. أجد الحد العام لهذه المتتالية.



النموذج (1).



النموذج (2).



النموذج (3).



النموذج (4).

أدرب وأحل المسائل

أحد الحدود الثلاثة التالية للمتتاليات الآتية:

① 6, 11, 16, 21, ...

② -1, 6, 13, 20, ...

③ $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \dots$

④ -8, -7, -6, -5, ...

⑤ -2, 1, 6, 13

⑥ 4, 16, 36, 64, ...

⑦ 3, 9, 27, 81, ...

⑧ 3, 8, 18, 38, ...

⑨ 128, 64, 32, 16, ...

أجد أول خمسة حدود لكل متتالية معطى حدها العام في ما يأتي، ثم أصنفها إلى متتالية خطية، أو تربيعية، أو تكعيبية:

⑩ $n + 3$

⑪ $3n - 1$

⑫ $4n + 5$

⑬ $n^2 - 1$

⑭ $n^2 + 2$

⑮ $200 - n^2$

⑯ $n^3 + 1$

⑰ $\frac{n^3}{2}$

⑱ $3n^3 - 1$

أجد الحد العام لكل متتالية مما يأتي:

⑲ 21, 24, 27, 30, 33

⑳ 1, 9, 17, 25, 33, ...

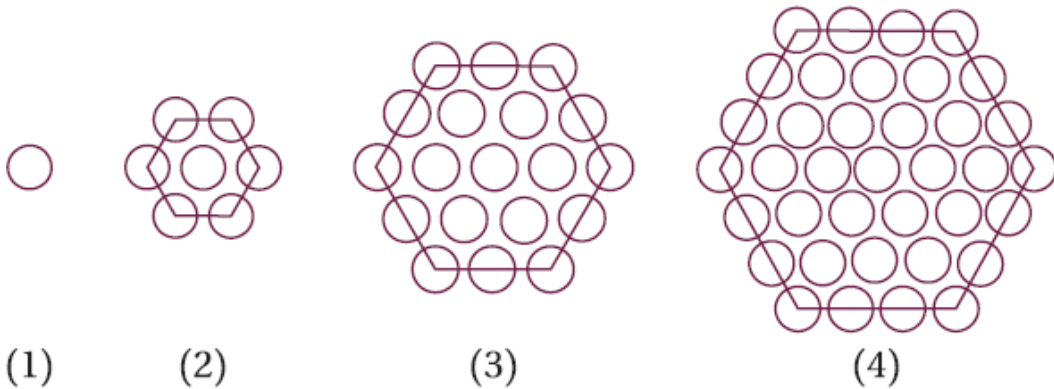
㉑ 10, 13, 18, 25, 34, ...

㉒ $-\frac{5}{2}, -1, \frac{3}{2}, 5, \frac{19}{2}, \dots$

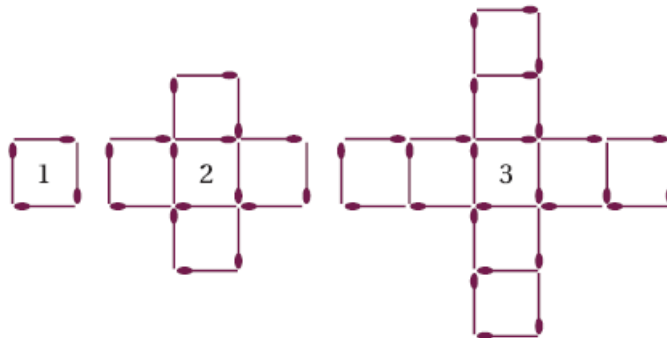
㉓ 6, 13, 32, 69, 130, ...

㉔ 1, 15, 53, 127, 249, ...

㉕ أجد عدد الدوائر في النموذج الخامس من النمط الهندسي الآتي:



㉖ في ما يأتي نمط هندسي يُمثل عدد أعواد الثقاب في نماذج متتالية، أحد الحد العام لهذه المتتالية.

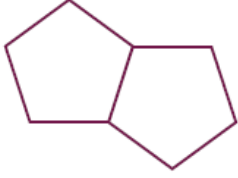


27) أكمل الجدول الآتي بالاعتماد على نماذج النمط الهندسي أدناه:

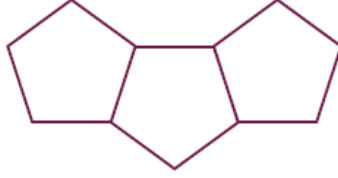
النموذج	(1)	(2)	(3)	(4)
المحيط	5	8		



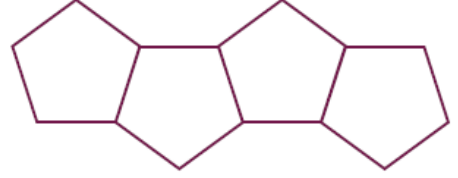
(1)



(2)



(3)



(4)

28) أجد محيط نموذج يحتوي n من الأشكال الخماسية.

29) أجد محيط نموذج يحتوي 50 شكلا خماسيا.

30) ما أكبر عدد من الأشكال الخماسية التي يمكن استعمالها لعمل نموذج محيطه أقل من $1000cm$ ؟

مهارات التفكير العليا

31) تحد: إذا كان الحد العام للمتتالية : $6, 16, 30, 48, 70, \dots$ هو $T(n) = an + bn^2$ ، حيث a, b عدنان حقيقيان، فأجد قيم a, b .

32) تحد: أجد أول ثلاثة حدود المتتالية خطية، إذا كان مجموع هذه الحدود 12، وحاصل ضربها 28.

33) مسألة مفتوحة : أجد ثلاث متتاليات تبدأ بـ 1، بحيث تكون الأولى خطية، والثانية تربيعية، والثالثة تكعيبية.

اختبار نهاية الوحدة

أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في ما يأتي:

① الحد العام (T_n) للمتتالية : 11,20,35,56, ... هو :

Ⓐ $T_n = n^2 + 6n + 4$

Ⓑ $T_n = 3n^2 + 8$

Ⓒ $T_n = 2n^2 + 9$

Ⓓ $T_n = n^2 + 4n + 6$

② إذا كان $f(x) = 3x^2 + 5x + 7$ ، فإن قيمة $f(-2)$ هي :

Ⓐ -22

Ⓑ -15

Ⓒ 9

Ⓓ 29

③ إذا كان $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 6$ ، $g(x) = 5x^2 - 7x + 4$ فإن ناتج $f(x) - g(x)$ هو :

Ⓐ $2x^3 - 9x^2 + 7x + 2$

Ⓑ $2x^3 + x^2 + 7x + 10$

Ⓒ $-3x^3 + 3x^2 + 13x - 4$

Ⓓ $-3x^3 - 4x^2 + 7x - 2$

④ إذا كان $g(x)$ كثير حدود من الدرجة السادسة و $h(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية. فإن درجة ناتج قسمة $g(x)$ على $h(x)$ هي :

Ⓓ الثامنة

Ⓒ الرابعة

Ⓑ الثالثة

Ⓐ الأولى

⑤ إذا كان $h(x) = x^2 - 2$ ، $f(x) = 3x - 5$ ، فإن قيمة $(h \circ f)(3)$ هي :

Ⓐ 4

Ⓑ 7

Ⓒ 14

Ⓓ 16

⑥ إذا كان $f(x) = 8 - 2x$ ، فإن قيمة $f^{-1}(4)$ هي :

Ⓐ 0

Ⓑ -6

Ⓒ -2

Ⓓ 2

⑦ خط التقارب الأفقي للاقتزان $r(x) = \frac{3}{4-3x} + 7$ هو :

Ⓐ $y = 0$

Ⓑ $y = 7$

Ⓒ $y = 4$

Ⓓ $y = -1$

⑧ الحد العاشر في المتتالية ... 0,2,6,12,20, ... هو :

Ⓐ 90

Ⓑ 95

Ⓒ 97

Ⓓ 99

⑨ مجال الاقتزان $f(x) = \frac{x-3}{x^2-3x-10}$ هو :

Ⓐ $\{x|x \neq -2, x \neq 3, x \neq 5\}$

Ⓑ $\{x|x \neq -5, x \neq 2\}$

Ⓒ $\{x|x \neq 5\}$

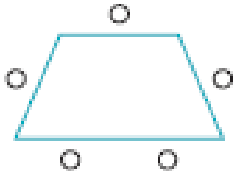
Ⓓ $\{x|x \neq -2, x \neq 5\}$

⑩ إذا كان $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ ، $g(x) = 6x^3 - 7x + 3$ فأوجد $x^2 f(x) + g(x)$

⑪ إذا كان $h(x) = 3x^2 - 4x$ ، $j(x) = 4x^3 + 2x + 5$ فأوجد $h(x).j(x)$

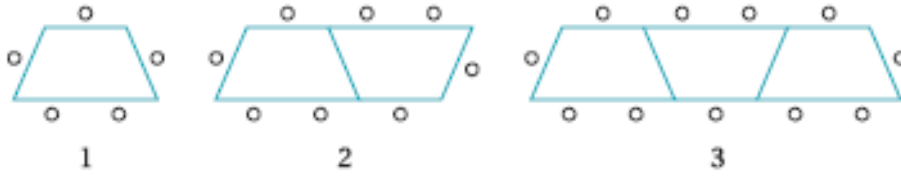
12) أقسم $(8x^3 + 12x - 5)$ على $(2x + 3)$

13) أجد خطوط التقارب لمنحنى الاقتران $f(x) = \frac{4}{2-x}$ ، ثم أمثله بيانياً، محدداً مجاله، ومداه.



يوجد في قاعة طعام إحدى المدارس طاولات على شكل شبه منحرف. وكل طاولة تتسع لخمس طلبة كما في الشكل الآتي:

لاحظ مُشرف القاعة أن عدد الطلبة يتغير تبعاً لعدد الطاولات الملاصقة بعضها لبعض كما في الشكل الآتي:



14) أملأ الفراغ بما هو مناسب في الجدول الآتي:

5	4	3	2	1	عدد الطاولات المتلاصقة
		11	8	5	عدد الطلبة

15) أجد الحد العام.

16) ما عدد الطلبة الذين يمكنهم الجلوس حول 13 طاولة متلاصقة؟

17) تنوي إدارة المدرسة عمل حفل لـ 200 طالب. كم طاولة متلاصقةً تلزم لذلك؟

إذا كان $x \neq -1$ ، $f(x) = 4x - 3$ ، $g(x) = \frac{1}{x+1} + 2$ فاجد:

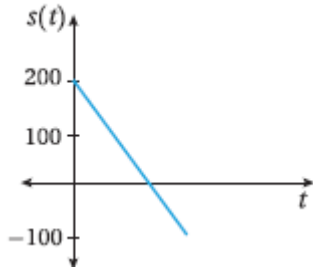
18) $g^{-1}(x)$

19) $(f \circ f)(x)$

20) $(g \circ f)(x)$

21) اجد الاقتران العكسي للاقتران $f(x) = \sqrt{4-x}$ محدداً المجال والمدى لكل من $f(x)$ و $f^{-1}(x)$.

تدريب على الاختبارات الدولية



يظهر في الشكل المجاور منحنى اقتران الموقع $s(t)$ لجسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالمترو t الزمن بالثانية.

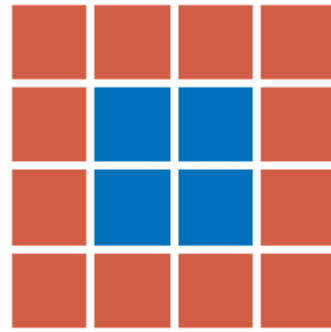
22 إذا وصل الجسم إلى الموقع $s = -100$ بعد 6 ثوان من بدء حركته، فأكتب قاعدة الاقتران $s(t)$.

23 ما الزمن الذي استغرقه الجسم منذ بدء حركته حتى وصل إلى نقطة الأصل؟

رتب فدوى بطاقات حمراء وزرقاء كما في الشكلين الآتيين:



الشكل (1).



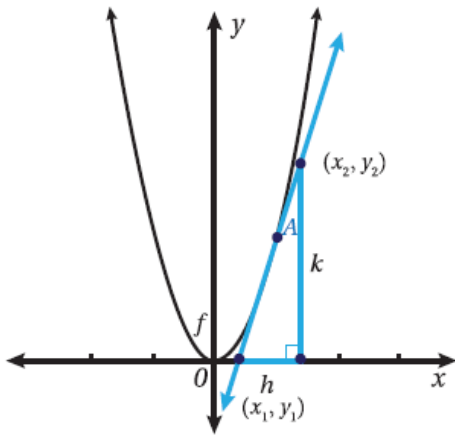
الشكل (2).

24 إذا استمر هذا النمط، فما عدد البطاقات الحمراء في الشكل n ؟

25 ما عدد البطاقات الزرقاء فيه؟

26 استعملت فدوى 64 بطاقة لتكوين أحد أشكال هذا النمط. كم عدد كل من البطاقات الحمراء والزرقاء المستعملة؟

تقدير ميل المنحنى

الدرس
الأول

تعلّمتُ سابقاً كيفية حساب ميل المستقيم، فهل يُمكنُ إيجاد ميل منحنى ليس مستقيماً؟

إنَّ ميل المنحنى عند نقطة واقعة عليه يساوي ميل المماس عند تلك النقطة؛ لذا، فإن ميل المنحنى يختلف من نقطة إلى أخرى عليه كما في النشاط المذكور آنفاً قبل الدرس.

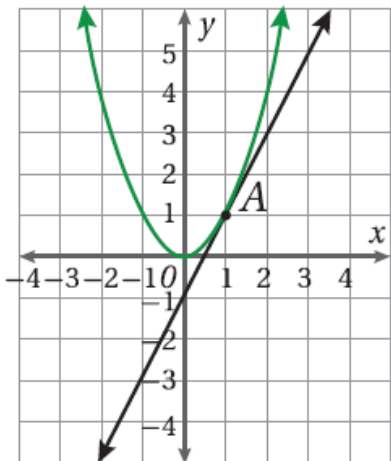
لإيجاد ميل منحنى عند نقطة ما، أرسم مماساً عند تلك النقطة، ثمَّ أجدُ ميل المماس باستخدام إحداثيات نقطتين تقعان عليه: (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) ، وذلك بالتعويض في صيغة ميل المستقيم.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{k}{h} \text{ ، حيث: } x_2 - x_1 \neq 0$$

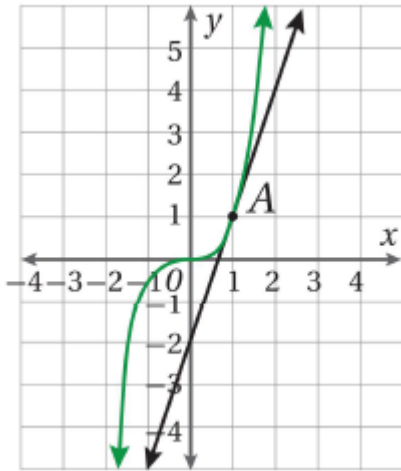
مثال 1

يُمثل المستقيم في الشكل المجاور مماساً لمنحنى الاقتران $y = x^2$ عند النقطة $A(1,1)$.

أجدُ ميل منحنى الاقتران عند النقطة A .



أتحقق من فهمي



يُمثل المستقيم في الشكل المجاور مماسا لمنحنى الاقتران $y = x^3$ عند النقطة $A(1,1)$.

أجد ميل منحنى الاقتران عند النقطة A .

إذا لم يكن المماس مرسوما عند النقطة التي يراد إيجاد ميل المنحنى عندها، فإنه يُرسم باستعمال المسطرة. وبما أن الرسم اليدوي ليس دقيقا، فإن ميل المماس المرسوم قد يختلف قليلا عن القيمة الدقيقة لميل المنحنى، عندئذ يكون الناتج قيمة تقريبية لميل المنحنى.

مثال 2

أقدر ميل منحنى الاقتران $y = x^3 - 3x^2 + 3$ عند كل نقطة مما يأتي:

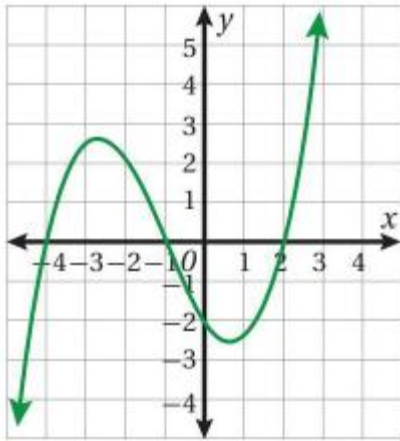
② النقطة $B(1,1)$.

① النقطة $A(3,3)$.

③ أكتب معادلة المماس بالمرارة بالنقطة $B(1,1)$.

أتعلم يكون ميل المنحنى عند نقطة عليه موجبا إذا صنع مماس المنحنى عند تلك النقطة زاوية حادة مع اتجاه محور x الموجب

أتحقق من فهمي

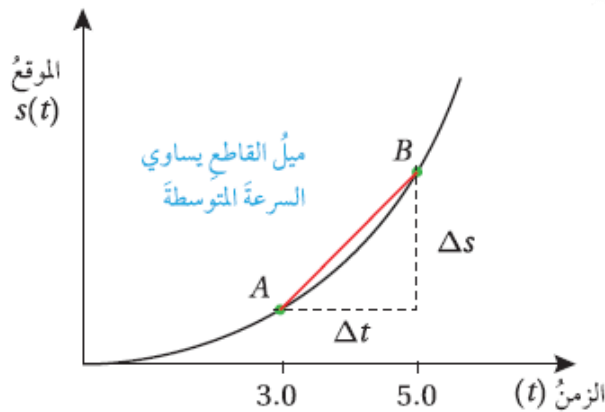


أقدر ميل منحنى الاقتران الممثل بيانيا في الشكل المجاور عند كل من

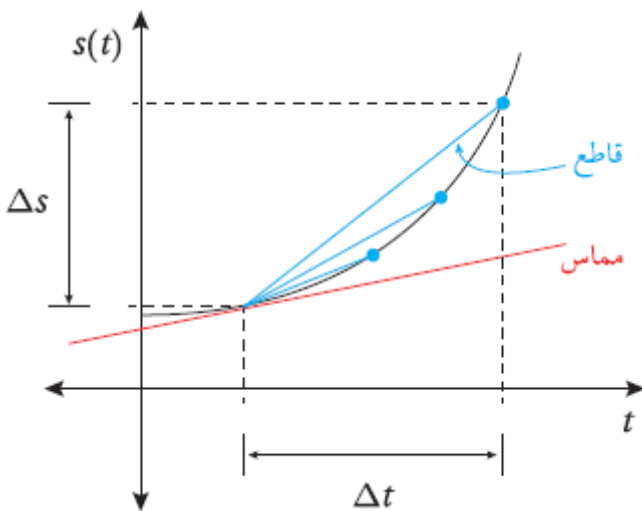
النقطتين : $A(-4,0), B(0,-2)$

تعرفتُ سابقاً أن منحنى الموقع - الزمن يكون مستقيماً عند الحركة بسرعة ثابتة، وأنه لا يكون مستقيماً عند الحركة بسرعة متغيرة. ويمكن حساب السرعة المتجهة المتوسطة \bar{v} لجسم متحرك في فترة زمنية، وذلك بقسمة التغير في الموقع Δs على التغير في الزمن Δt :

$$v_{avg} = \bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$



بالنظر إلى منحنى الموقع - الزمن المجاور لجسم يتحرك في مسار مستقيم يتبين أن السرعة المتجهة المتوسطة من اللحظة $t = 3$ إلى اللحظة $t = 5$ تساوي ميل القاطع الذي يمر بالنقطتين A و B على المنحنى.



لكن السرعة المتجهة المتوسطة لا تُقدّم معلومات كافية في كثير من المواقف، مثل تحديد السرعة المتجهة لسيارة لحظة مرورها أمام الرادار ؛ فتلزم عندئذ **السرعة المتجهة اللحظية** التي يُمكن إيجادها بتقليص الفترة الزمنية للسرعة المتجهة المتوسطة حتى تصبح نقطة (لحظة) كما في الشكل الآتي، فيصبح القاطع الذي يمر بنقطتين على المنحنى مماساً له عند نقطة واحدة

• بما أن ميل المماس يساوي ميل المنحنى عند نقطة التماس، فإنَّ السرعة المتجهة اللحظية عند لحظة ما تساوي ميل منحنى اقتران الموقع - الزمن عند تلك اللحظة.

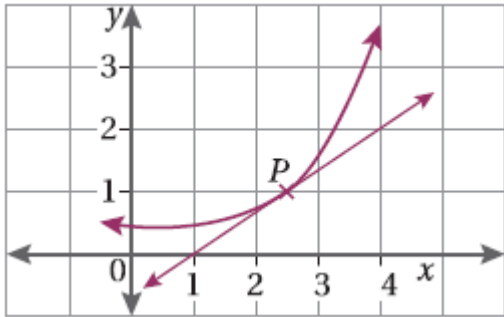
مثال 3

يُمثل الاقتران $s(t) = 4.9t^2$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s موقع الجسم بالأمتار بعد t ثانية. أقدر سرعة الجسم بعد 3 ثوان من بدء الحركة.

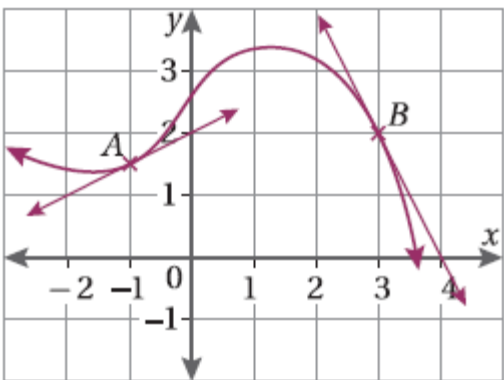
أتحقق من فهمي

يمثل الاقتران $s(t) = t^2 + t$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s موقع الجسم بالأمتار بعد t ثانية. أقدر السرعة اللحظية بعد 5 ثوان.

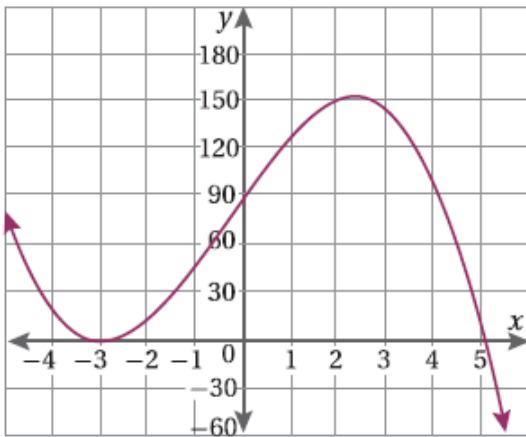
أُتدرب وأحل المسائل



- ① يُمثل المستقيم في الشكل المجاور مماساً لمنحنى اقتران عند النقطة $P(2.5, 1)$
أجد ميل منحنى الاقتران عند النقطة P .



- ② في الشكل المجاور ، رسم مماسان لمنحنى اقتران عند النقطتين $B(3, 2), A(-1, 1.5)$
أجد ميل منحنى الاقتران عند كل من A و B .



- ③ أقدر ميل منحنى الاقتران المُبين جانباً عند النقطة $(2, 150)$ ، والنقطة $(4.5, 60)$

أستعمل جدول القيم الآتي للإجابة عن الأسئلة (4 – 7) :

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	2	1.5	2	3.5	6

- ④ أمثل منحنى الاقتران $f(x)$ بيانياً في الفترة $0 \leq x \leq 4$

- ⑤ أرسم مماساً لمنحنى الاقتران عند النقطة $(3, 3.5)$.

- ⑥ أقدر ميل منحنى الاقتران عند النقطة $(3, 3.5)$.

- ⑦ ما إحداثيات النقطة التي يكون ميل المنحنى عندها صفراً ؟

أكمل جدول قيم الاقتران $f(x) = 0.1x^3$ الآتي، ثم استعمله لحل المسائل (8 – 10):

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$0.1x^3$		0.01	0.1		0.8		

8) أرسم منحنى الاقتران $f(x) = 0.1x^3$ في الفترة $0 \leq x \leq 3$

9) أرسم مماسا لمنحنى الاقتران عند النقطة $(2, 0.8)$.

10) أقدّر ميل منحنى الاقتران عند النقطة $(2, 0.8)$.

أقدّر ميل منحنى كل اقتران مما يأتي:

12) $y = 3 + 2x^2$ عند النقطة $(-1, 5)$.

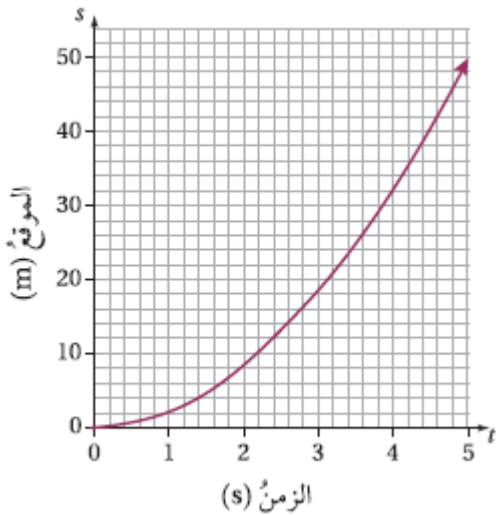
11) $y = 4x^2 + 1$ عند النقطة $(1, 5)$.

14) $y = 5x^3 + 1$ عند النقطة $(0, 1)$.

13) $y = 1 - x^2$ عند النقطة $(-1, 0)$.

16) $y = 8 - 2x$ عند النقطة $(1, 6)$.

15) $y = 9 - x^2$ عند النقطة $(2, 5)$.



درجات نارية: بدأت دراجة نارية الحركة من وضع السكون في مسار مستقيم. وبيّن المنحنى المجاور موقع الدراجة خلال أول 5 ثوان من بدء حركتها :

17) أرسم نسخة من المنحنى، مستعينا بالجدول الآتي:

t	0	1	2	3	4	5
$s(t)$	0	2	8	18	32	50

18) أرسم مماسا للمنحنى عندما $t = 2$.

19) أقدّر سرعة الدراجة بعد ثانيتين من بدء الحركة.

20) أقدّر سرعة الدراجة بعد 4 ثوان من بدء الحركة.

21) أحسب السرعة المتوسطة " للدراجة في الفترة الزمنية $[1, 3]$.

سيارات : أراد مهندس أن يدرس سرعة سيارة تتحرك في مسار مستقيم وفي اتجاه واحد، فسجل موقع السيارة بالنسبة لنقطة انطلاقها في لحظات زمنية محددة كما في الجدول الآتي، ثم استعمل القوانين الفيزيائية المتعلقة بالقوى المؤثرة على السيارة لكتابة معادلة جبرية تمثل العلاقة بين موقع السيارة والزمن على النحو الآتي : $s(t) = at + bt^2$ حيث a و b عدنان ثابتان:

الزمن t (ثانية)	0	1	2	3	4
الموقع s (متر)	0	5	12	21	32

22) أرسم منحنى اقتران الموقع - الزمن $s(t)$.
 23) أقدّر السرعة عندما $t = 3$.
 24) أجد قيمة كل من a و b .

25) فيزياء : يمثل الاقتران $s(t) = 3t - t^2$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث الموقع بالمتر، و t الزمن بالثانية. أقدّر سرعة الجسم . عندما $t = 2$.

مهارات التفكير العليا

26) تبرير : أقدّر ميل منحنى الاقتران $f(x) = x^2 - 6x - 16$ عند كل من النقاط الآتية، مبرراً إجابتي:

- نقطتا تقاطع المنحنى مع محور x .
- نقطة تقاطع المنحنى مع محور y .

27) مسألة مفتوحة: أكتب قاعدة اقتران من الدرجة الثانية، ثم أمثله بيانياً، مقدراً ميله عند نقطتين متعاكستين عليه: $(a, b), (-a, b)$.

الاشتقاق

الدرس
الثاني

تعرفتُ في الدرس السابق كيفية إيجاد الميل أو تقديره، وهي طريقة ليست سهلة، وتحتاج إلى دقة عند رسم المماس. سأتعرفُ في هذا الدرس طريقة جبرية أسهل لإيجاد ميل منحنى الاقتران عند نقطة عليه من دون حاجة إلى رسم المماس.

عند إيجاد ميل منحنى الاقتران $y = x^2$ عند نقاط مختلفة عليه باستعمال طريقة ميل المماس التي تعرفتها سابقاً، وتنظيم القيم في الجدول الآتي، سألاحظ أن ميل المنحنى عند أي نقطة (x, y) يساوي قيمة x مضروبة في العدد 2؛ أي إن الميل m يساوي $2x$

(x, y)	$(-2, 4)$	$(-1, 1)$	$(0, 0)$	$(1, 1)$	$(3, 9)$	$(4, 16)$	$(5, 25)$
m	$-4 = -2 \times 2$	$-2 = -1 \times 2$	$0 = 0 \times 2$	$2 = 1 \times 2$	$6 = 3 \times 2$	$8 = 4 \times 2$	$10 = 5 \times 2$

وبالمثل، سأجد أن ميل منحنى الاقتران $f(x) = x^3$ عند أي نقطة (x, y) على منحناه $m = 3x^2$.

بوجه عام، فإن ميل منحنى الاقتران $f(x) = x^n$ عند أي نقطة (x, y) عليه هو $m = nx^{n-1}$.

مشتقة الاقتران $f(x)$ عند نقطة واقعة على منحناه

هي ميل المنحنى عند تلك النقطة، ويُرمز إليها بالرمز $f'(x)$.

رموز رياضية تستعمل

الرموز y' ، $f'(x)$ ، $\frac{dy}{dx}$ للتعبير

عن مشتقة الاقتران $y = f(x)$

مفهوم أساسي مشتقة اقتران القوة

○ **بالكلمات:** عند اشتقاق الاقتران $f(x) = x^n$ ، فإن أس x في المشتقة يكون أقل بواحد من

أس x في الاقتران الأصلي، وإن معامل x في المشتقة يساوي أس x في الاقتران الأصلي.

○ **بالرموز:** إذا كان $f(x) = x^n$ ، حيث n عدد صحيح غير سالب، فإن $f'(x) = nx^{n-1}$.

مثال 1

أجدُ مشتقة كل اقتران مما يأتي:

$$\textcircled{1} f(x) = x^8$$

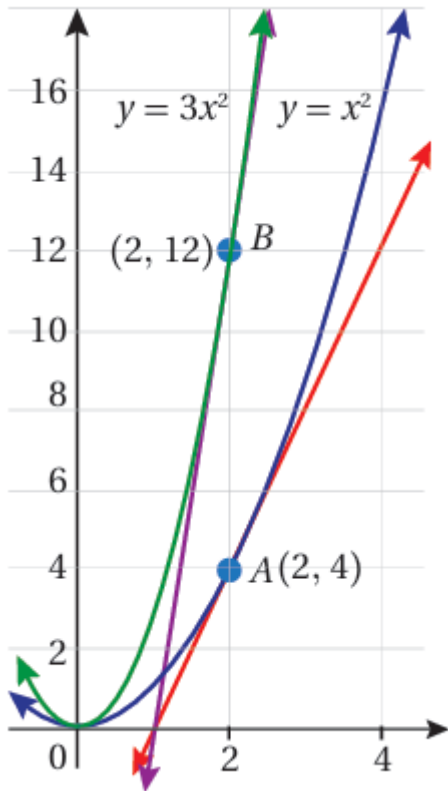
$$\textcircled{2} f(x) = x^5$$

أتحقق من فهمي

أجدُ مشتقة كل اقتران مما يأتي:

$$\textcircled{a} f(x) = x^7$$

$$\textcircled{b} f(x) = x^{11}$$



من المعلوم أن قيم y للاقتران $f(x) = 3x^2$ تساوي 3 أمثال قيم y التي تناظرها للاقتران $g(x) = x^2$ ، وعليه، فإن ميل منحنى الاقتران $f(x) = 3x^2$ عند النقطة $(2, 12)$ يساوي 3 أمثال ميل منحنى الاقتران $g(x) = x^2$ عند النقطة $(2, 4)$.

وهذا يعني أن مشتقة $(3x^2)$ تساوي 3 أمثال مشتقة (x^2) ؛ أي $(3 \times 2x)$.

بوجه عام، فإن مشتقة الاقتران $f(x) = ax^n$ ، حيث a عدد حقيقي، هي $f'(x) = a \times nx^{n-1}$.

مفهوم أساسي مشتقة مضاعفات القوة ومشتقة الثابت

○ **مشتقة مضاعفات القوة:** إذا كان $f(x) = ax^n$ ، حيث n عدد صحيح غير سالب، فإن $f'(x) = anx^{n-1}$.

○ **مشتقة الثابت:** إذا كان $f(x) = c$ ، حيث c عدد حقيقي، فإن $f'(x) = 0$ ؛ أي إن مشتقة الاقتران الثابت تساوي صفراً.

مثال 2

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

① $f(x) = 2x^4$

② $f(x) = \frac{1}{4}x^3$

③ $f(x) = -2x$

④ $f(x) = 4$

أتحقق من فهمي

أجدُ مشتقة كل اقتران في ما يأتي:

a) $f(x) = 5x^{12}$

b) $f(x) = -7x^8$

c) $f(x) = 0.5x^6$

d) $f(x) = -11$

أتذكر ميل الاقتران
الثابت يساوي صفرا

مفهوم أساسي مشتقة المجموع ومشتقة الفرق

○ **بالكلمات:** مشتقة مجموع كثيري الحدود تساوي مجموع مشتقتيهما، ومشتقة الفرق بين كثيري الحدود تساوي الفرق بين مشتقتيهما.

○ **بالرموز:** إذا كان $f(x) = g(x) \pm h(x)$ ، حيث $g(x)$ و $h(x)$ كثيرا حدود، فإن
 $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$

مثال 3

أجدُ مشتقة كل اقتران مما يأتي:

① $f(x) = x^2 - 6x$

② $f(x) = 5x^7 + 3x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 8$

أتحقق من فهمي

أحد مشتقة كل من الاقترانين الآتيين:

$$\textcircled{a} f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x - 1$$

$$\textcircled{b} g(x) = 4x - 7x^5 - 6 + \sqrt{3}x^2$$

ألاحظ من الأمثلة السابقة أن

مشتقة الاقتران

هي اقتران جديد يُمثل قيمة ميل منحنى الاقتران الأصلي عند قيم مختلفة؛ لذا يُمكن إيجاد ميل منحنى الاقتران عند أي نقطة عليه، بتعويض الإحداثي x لتلك النقطة في اقتران المشتقة

مثال 4

إذا كان $f(x) = 3x^2 - 18x + 5$ ، فاستعمل المشتقة لإيجاد كل مما يأتي:

- ① ميل منحنى $f(x)$ عند النقطة $(1, -10)$.
- ② قيمة x التي يكون عندها ميل منحنى الاقتران صفراً.

أتحقق من فهمي

إذا كان $f(x) = 5x^2 + 25x - 9$ فاستعمل المشتقة لإيجاد كل مما يأتي:

- ① ميل منحنى $f(x)$ عندما $x = -2$.
- ② قيمة x التي يكون عندها ميل منحنى الاقتران صفراً.

- تعرفت سابقاً أن ميل منحنى الموقع - الزمن في لحظة ما (عند نقطة محددة) يساوي السرعة اللحظية عند تلك النقطة، وبصورة مشابهة فإن ميل منحنى السرعة - الزمن في لحظة ما يساوي التسارع اللحظي.
- أستطيع الآن إيجاد كل من السرعة اللحظية، والتسارع اللحظي باستعمال المشتقة بسهولة من دون حاجة إلى تقدير ميل المنحنى باستعمال المماس كما في الدرس السابق.

مثال 5

يُمثل الاقتران $s(t) = 0.6t^3 - 1.5t - 0.9$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s موقع الجسم بالأمتار بعد t ثانية :

① أجد سرعة الجسم بعد 3 ثوان من بدء حركته.

② أجد تسارع الجسم بعد 5 ثوان من بدء حركته.

أتذكر يرمز للثواني بالرمز s وهو الحرف الأول من كلمة وتعني ثانية

أتحقق من فهمي

يُمثل الاقتران $s(t) = 2.5t^2 + 0.1t - 0.3$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s موقع الجسم بالأمتار بعد t ثانية. أجد سرعة الجسم وتسارعه عندما $t = 3$.

أُتدرب وأحل المسائل

أجد مشتقة كل من الاقترانات الآتية:

① $f(x) = -7$

② $g(x) = 3x^9$

③ $r(x) = -5x^2$

④ $i(x) = x^4 - 3x$

⑤ $v(x) = x^2 + x + 1$

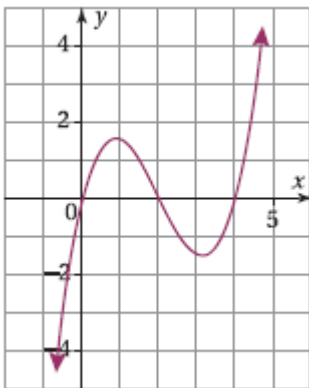
⑥ $t(x) = 6 - 2x + x^2$

أجد قيمة $f'(-2)$ في كل مما يأتي :

⑦ $f(x) = \frac{3}{5}x^3 + x^4 - 2x + 7$

⑧ $f(x) = x^{99} + \sqrt{2}x$

⑨ $f(x) = \frac{7\pi}{18}$

⑩ أجد النقطة التي يكون عندها ميل منحنى الاقتران $f(x) = 2x^2 - 10$ هو 12يمثل الاقتران $s(t) = t^3 - 6t + 3$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s موقع الجسم بالأمتار بعد t ثانية:⑪ أجد الاقتران $v(t)$ الذي يُمثل سرعة الجسم في أي لحظة (t ثانية).⑫ أجد سرعة الجسم عندما $t = 3$.⑬ أجد الزمن t عندما تكون السرعة $6m/s$.⑭ أجد الاقتران $a(t)$ الذي يمثل تسارع الجسم، حيث t الزمن بالثانية.⑮ أجد تسارع الجسم عندما $t = 5$.يُمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x) = 0.5x^3 - 3x^2 + 4x$:⑯ أجد $f'(x)$ ⑰ أجد ميل منحنى الاقتران عند نقاط تقاطعه مع محور x .⑱ أحدد على المنحنى النقطة التي يساوي عندها الميل -0.5 .⑲ أجد معادلة مماس منحنى الاقتران $f(x) = 3x^3 + 2$ عند النقطة التي يكون إحداثي x لها 1تقع النقطة $P(-2, b)$ على منحنى الاقتران $g(x) = 3x^3 - x^2 - 7x + 4$:⑳ أجد قيمة b .㉑ أجد قيمة x التي يكون عندها ميل منحنى الاقتران صفراً.

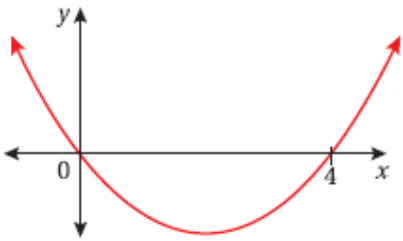
إذا كانت قيمة الميل عندما $x = 2$ لمنحنى المعادلة $y = x^3 - 2ax$ حيث a عدد ثابت، هي -12

22) أجد قيمة الثابت a . 23) أجد قيمة ميل المنحنى عندما $x = 4$.

أجد $f'(x)$ في كل مما يأتي:

24) $f(x) = 2x(x + 1)$

25) $f(x) = (x + 2)(x + 5)$ 26) $f(x) = (x + 3)(x - 3)$



27) يُبيِّن الشكل المجاور التمثيل البياني للاقتران

$f(x) = kx(x - 4)$ ، حيث k عدد حقيقي. أجد قيمة k إذا كان

ميل المنحنى عند النقطة $(4,0)$ هو 2

مهارات التفكير العليا.

28) تبرير: أثبت وجود نقطتين على منحنى الاقتران $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x + 4$ ، تكون عندهما مشتقة الاقتران تساوي 4 ، ثم أجد إحداثي هاتين النقطتين، مبرراً إجابتي.

29) تحد: أجد قيم a, b إذا كان ميل منحنى الاقتران $y = ax^3 + bx^2 + 5$ عند النقطة $(2, -3)$ هو صفراً.

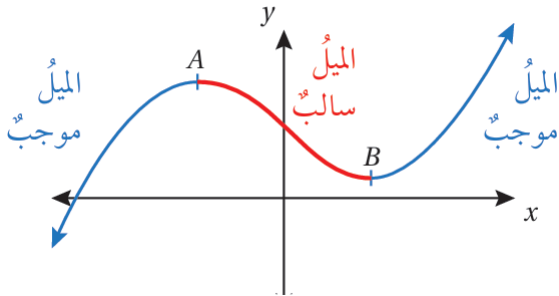
30) تحد: أطلقت قذيفة من سطح الأرض رأسياً إلى الأعلى، فكان موقعها بالنسبة لسطح الأرض s بالمتراً

بعد t ثانية من إطلاقها $s(t) = -4.6t^2 + 147t$. ما سرعة القذيفة عندما يكون موقعها 980 m

فوق سطح الأرض؟

الدرس
الثالث

القيم العظمى والقيم الصغرى



النقطة الحرجة

تسمى النقطة التي يكون عندها ميل منحنى كثير الحدود صفراً في الشكل المجاور، A و B نقطتان حرجتان؛ لأن ميل المنحنى عند كل منهما صفر

القيمة الصغرى المحلية

وتسمى القيمة h في النقطة $B(e, h)$ التي إشارة ميل المنحنى عن يسارها سالبة، وعن يمينها موجبة، لأنها أصغر من القيم المجاورة لها

القيمة العظمى المحلية

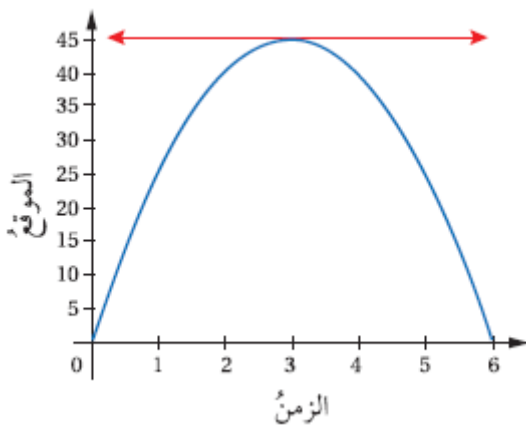
تسمى القيمة d في النقطة $A(c, d)$ التي إشارة ميل المنحنى عن يسارها موجبة، وعن يمينها سالبة، لأنها أكبر من القيم المجاورة لها

مثال 1

أستعمل المشتقة لإيجاد القيم العظمى المحلية والقيم الصغرى المحلية للاقتزان $f(x) = x^3 - 12x + 4$ (إن وجدت)

أتحقق من فهمي

أجدُ القيم العظمى والقيم الصغرى المحلية للاقتران $g(x) = 2x^3 - 6x - 15$ (إن وُجِدَتْ).



● يمثل الإحداثي y للنقطة التي يتغير عندها اتجاه حركة الجسم من الصعود إلى الهبوط قيمة عظمى لمنحنى الموقع - الزمن؛ لأن مشتقة المنحنى عند تلك النقطة تساوي صفراً (المماس أفقي)؛ لذا يُمكن استعمال المشتقة لتحديد النقطة التي يبلغ عندها الجسم أعلى موقع.

مثال 2

يمثل الاقتران $s(t) = 1 + 25t - 5t^2$ موقع كرة بالنسبة لسطح الأرض بالمتري بعد t ثانية من ركلها رأسياً لأعلى:

② أجدُ أعلى ارتفاع تصله الكرة

① أجد سرعة الكرة بعد 3 ثوان من ركلها

أتعلم بما أن مشتقة اقتران الموقع هي اقتران السرعة، فإن القيم التي تساوي عندها مشتقة اقتران الموقع صفرًا هي القيم التي تنعدم عندها السرعة

أتحقق من فهمي

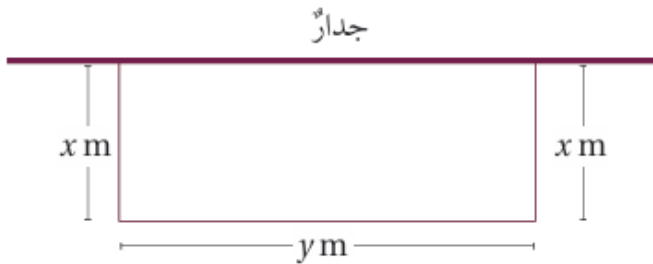
يُمثل الاقتران $s(t) = 20t - 5t^2$ موقع حجر بالنسبة إلى سطح الأرض بالمتر بعد t ثانية من قذفه رأسياً لأعلى:

Ⓐ أجد سرعة الحجر بعد ثنيتين من قذفه.

Ⓑ أجد أعلى ارتفاع يصله الحجر.

❖ إذا مثل الاقتران $f(x)$ مساحة منطقة ما، فإن القيمة الكبرى للمساحة تساوي القيمة العظمى للاقتران، والقيمة الصغرى للمساحة تساوي القيمة الصغرى للاقتران

مثال 3



جدار: لدى مزارع 32 m من السياج، أراد أن يُسج به حظيرة مستطيلة، طولها y متراً، وعرضها x متراً، بجانب جدار يكون أحد أضلاع هذه الحظيرة:

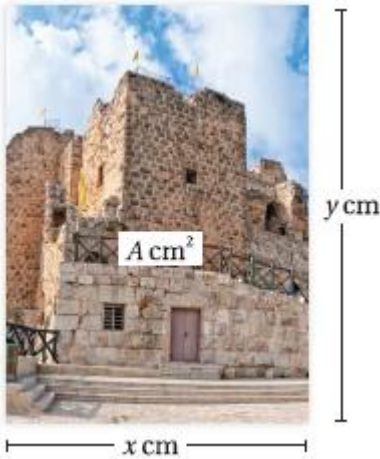
① أبين أن الاقتران $A(x) = x(32 - 2x)$ يُمثل مساحة الحظيرة.

② اجد $A'(x)$.

③ أستعمل المشتقة لإيجاد قيمة x التي تجعل مساحة الحظيرة أكبر ما يُمكن، ثم أجد تلك المساحة.

أتذكر تسمى قيم x التي تحقق المعادلة $f'(x) = 0$ قيما حرجة لمنحنى الاقتران $f(x)$

أتحقق من فهمي



يبين الشكل المجاور صورة مستطيلة الشكل القلعة عجلون، محيطها 72 cm ، ومساحتها $A\text{ cm}^2$:

① أبين أن الاقتران $A(x) = 36x - x^2$ يُمثل مساحة الصورة.

② اجد $A'(x)$.

③ أستعمل المشتقة لإيجاد قيمة x التي تجعل مساحة الصورة أكبر ما يمكن.

④ أجد أكبر مساحة ممكنة للصورة.

أدرب وأحل المسائل

أستعمل المشتقة لإيجاد القيم العظمى والقيم المحلية الصغرى لكل من الاقترانات الآتية (إن وُجِدَتْ):

① $f(x) = x^2 - 4x + 3$

② $f(x) = x^2 + 6x - 3$

③ $f(x) = 1 + 5x - x^2$

④ $f(x) = x^3 + 1.5x^2 - 18x$

⑤ $f(x) = 18x^2 - x^4$

⑥ $f(x) = 2x^3 - 6x + 4$

⑦ $f(x) = x^3 - 12x - 4$

⑧ $f(x) = 2x^3 + 7$

⑨ $f(x) = x^3 - 2x + 4$

⑩ $f(x) = x^3 + x^2 - 8x + 54$

يمثل الاقتران $h(t) = 1.2 + 19.6t - 4.9t^2$ ارتفاع سهم عن سطح الأرض بالمتر بعد ثانية من إطلاقه:

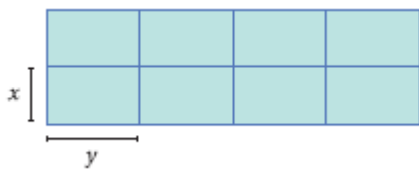
⑪ أجد سرعة السهم بعد 3 ثوان.

⑫ أستخدم المشتقة لإيجاد أعلى ارتفاع يصله السهم.

⑬ يُمثل الاقتران $A(x) = x(50 - x)$ مساحة مستطيل، حيث x الطول بالمتر. ما أكبر مساحة ممكنة للمستطيل؟

⑭ للاقتران $f(x) = 3x^4 - 10x^3 + 6x^2 + 3$ ثلاث نقاط حرجة. أجد إحداثيات هذه النقاط، مصفا إياها إلى عظمي، وصغرى محلية.

⑮ أحد قيمة الثابت k إذا كان للاقتران $f(x) = x^2 + \frac{1}{k}x$ قيمة حرجة عندما $x = 3$.



لدى مزارع $180m$ من الشباك، أراد أن يصنع منها حظائر لأغنامه، طول كل منها y متراً، وعرضها x متراً كما في الشكل المجاور:

⑯ أبين أن العلاقة بين x و y هي $y = 18 - 1.2x$

⑰ أبين أن الاقتران $A(x) = 144x - 9.6x^2$ يُمثل المساحة الكلية للحظائر.

⑱ أستخدم المشتقة لإيجاد قيمة x التي تجعل المساحة الكلية للحظائر أكبر ما يُمكن.

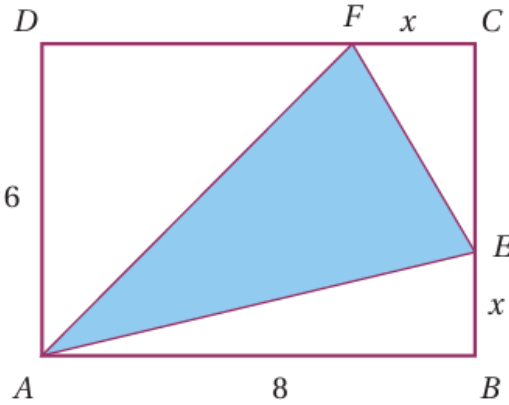
⑲ أجد أكبر مساحة كلية ممكنة للحظائر.

⑳ برهان: أثبت أن الاقتران $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x - 5$ ليس له قيم حرجة.

مهارات التفكير العليا

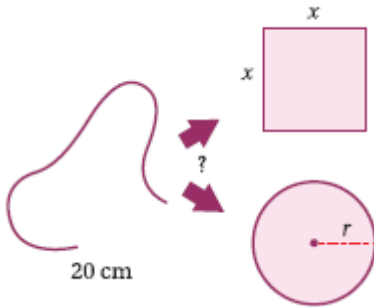
21) تبرير : أجدُ قيمتي الثابتين . إذا كان للاقتران $f(x) = x^2 + ax + b$ قيمة حرجة عند النقطة (1,3) ، ثم أحدد نوع القيمة الحرجة، مبرراً إجابتي.

يبين الشكل المجاور المثلث AFE الذي تقع رؤوسه على أضلاع المستطيل $ABCD$:



22) اعتماداً على القياسات المعطاة في الشكل، أبينُ أنُ الاقتران $H(x) = 24 - 4x + \frac{1}{2}x^2$ يُمثل مساحة المثلث AFE .

23) أستعمل المشتقة لإيجاد قيمة x التي تجعل مساحة المثلث AFE أصغر ما يمكن.



24) تحد: سلك طوله 20cm ، يراد قصه لعمل مربع ودائرة، أحدد موقع القص بحيث يكون مجموع مساحتي المربع والدائرة أصغر ما يُمكن.

اختبار نهاية الوحدة

أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في ما يأتي :

① ميل منحنى الاقتران $f(x) = 3x - 1$ عند النقطة $x = 5$ هو :

- Ⓐ 3 Ⓑ $\frac{1}{3}$ Ⓒ -1 Ⓓ 0

② إذا كان $f(x) = x(2x + 1)$ ، فإن $f'(x)$ يساوي :

- Ⓐ x Ⓑ $2x + 1$ Ⓒ $2x^2 + x$ Ⓓ $4x + 1$

③ قيمة x التي عندها قيمة عظمى للاقتران $f(x) = (x - 2)(x - 3)^2$ هي :

- Ⓐ $-\frac{7}{3}$ Ⓑ $-\frac{5}{2}$ Ⓒ $\frac{7}{3}$ Ⓓ $\frac{5}{2}$

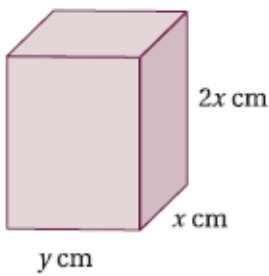
④ إذا مثل الاقتران $s(t) = t^2$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s موقع الجسم بالأمتار بعد t ثانية، فإن سرعة الجسم بوحدة m/s عندما $t = 1$ هي :

- Ⓐ 0 Ⓑ 1 Ⓒ 2 Ⓓ 4

⑤ إذا كان $h(x) = 2x^2 + x$ ، فأجد $h'(x)$ ، ثم أبين أن $x(1 + h'(x)) = 2h(x)$

⑥ إذا وقعت النقطة $P(-1, c)$ على منحنى الاقتران $f(x) = 5x^2 + 2$ ، فأجد قيمة c ، ثم أحدد إذا كان الميل موجبا أو سالبا عند النقطة P .

⑦ أجد معادلة مماس منحنى الاقتران $f(x) = 4x^3 + 2$ عند النقطة التي إحداثي x لها - 1



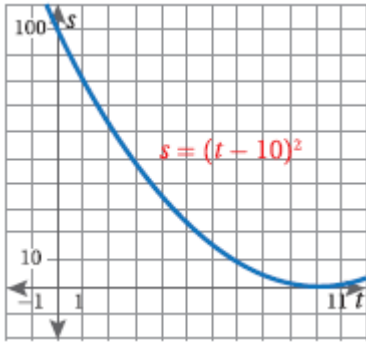
يُبين الشكل المجاور قالباً يستعمل لصنع لبن البناء، وتبلغ مساحة سطحه الكلية 600cm^2 :

⑧ أبين أن الاقتران $V(x) = 200x - \frac{4}{3}x^3$ يمثل حجم القالب.

⑨ أستعمل المشتقة لإيجاد قيمة x التي تجعل الحجم أكبر ما يُمكن.

⑩ أجد أكبر حجم ممكن للقالب.

⑪ يُمثل الاقتران $s(t) = t^2 + 1$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s موقع الجسم بالأمتار بعد t ثانية. أجد السرعة بعد ثانيتين، ثم أجد الزمن t عندما تبلغ السرعة 6 m/s .



أطلقت سيارة سُمِّيَ جرس إنذار لتعبئة الوقود، فتحرّكت في مسار مستقيم نحو محطة الوقود.

يُمثل المنحنى في الشكل المجاور العلاقة بين موقع السيارة بالأمتار (s) بالنسبة إلى الزمن (t) بالثواني:

12) أجد سرعة السيارة بعد ثنيتين من انطلاق جرس تعبئة الوقود.

13) أجد سرعة السيارة بعد 10 ثوانٍ.

أجد مشتقة كل من الاقتارات الآتية:

14) $f(x) = 2\pi^3$

15) $f(x) = x^8$

16) $f(x) = -3x^4$

17) $f(x) = x$

18) $f(x) = 1 - 2x$

19) $f(x) = 4 - 5x^2 + x^3$

أستعمل المشتقة لإيجاد القيم العظمى والقيم الصغرى لكل من الاقتارات الآتية (إن وُجِدَتْ):

20) $f(x) = 17$

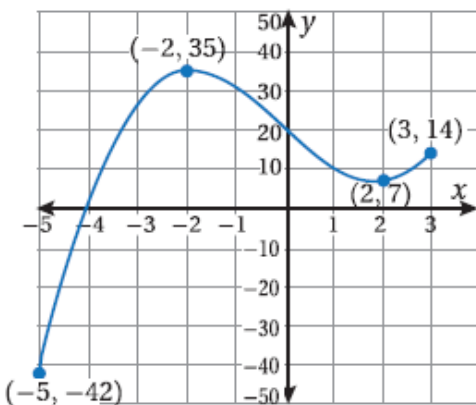
21) $f(x) = 5x + 4$

22) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

23) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x + 1$

24) تمثل العلاقة $s(t) = 0.6t^3 - 1.5t - 0.9$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s موقع الجسم بالأمتار بعد t ثانية. ما الزمن الذي تساوي عنده السرعة 14.7 m/s ؟

25) أجد قيمة الثابت k إذا كان للاقتاران $f(x) = kx - x^3$ نقطة حرجة عندما $x = -1$

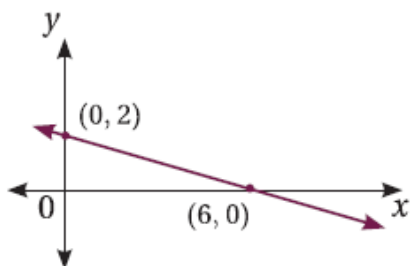


اعتماداً على التمثيل البياني الآتي:

26) أحدد الفترة (الفترة) التي يكون عندها ميل المنحنى موجبا.

27) أحدد الفترة (الفترة) التي يكون عندها ميل المنحنى سالبا.

28) أحدد النقطة (النقاط) التي يكون عندها ميل المنحنى صفرا.



29) إذا كان المستقيم في الشكل المجاور هو منحنى الاقتاران $f(x)$

فأجد $f'(x)$.

تدريب على الاختبارات الدولية

أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في ما يأتي:

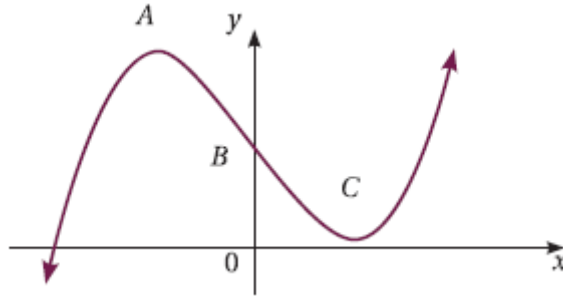
30 جميع قيم x التي عندها قيم عظمي أو قيم صغرى محلية للاقتران $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 15$ هي :

- (a) -1,0,1 (b) -1,0 (c) 0,1 (d) -1,1

31 عدد النقاط الحرجة للاقتران $f(x) = (x - 3)^2$ هو :

- (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

يُمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x) = x^3 - 12x + 17$ الذي له قيمة عظمي عند النقطة A ، وقيمة صغرى عند النقطة C ، ويقطع محور y عند النقطة B :



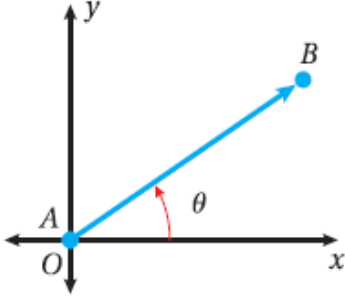
32 أجد $f'(x)$

33 أجد ميل منحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة B .

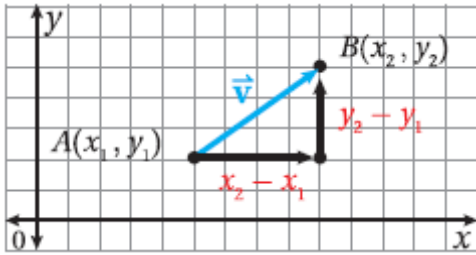
34 أجد إحداثيي كل من النقطتين A و C .

الدرس
الأول

المتجهات في المستوى الإحداثي



• درست في الفيزياء تمثيل المتجهات في صورة سهم ينطلق من نقطة إسناد، مثل نقطة الأصل، وبطول يحدده مقياس رسم مناسب، واتجاه تحدده الزاوية θ التي يصنعها السهم مع محور مرجعي، مثل محور x الموجب عكس عقارب الساعة. ولأن استعمال مقياس الرسم قد لا يكون دقيقاً في بعض الأحيان؛ فإنه يتعين استعمال طريقة أكثر دقة لتمثيل المتجهات.



• يُمكن تمثيل المتجه (\overline{AB}) في المستوى الإحداثي في صورة قطعة مستقيمة تمتد من نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$ إلى نقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ ، وفي اتجاه يُحدده رمز السهم كما في الشكل المجاور.

المركبة الرأسية

الإزاحة الرأسية بين نقطة بداية المتجه ونقطة نهايته وتساوي $(y_2 - y_1)$.

المركبة الأفقية

الإزاحة الأفقية بين نقطة بداية المتجه ونقطة نهايته وتساوي $(x_2 - x_1)$.

• يُمكن كتابة المتجه بالصورة الإحداثية بدلالة مركبتيه الأفقية والرأسية (العمودية) كما يأتي:

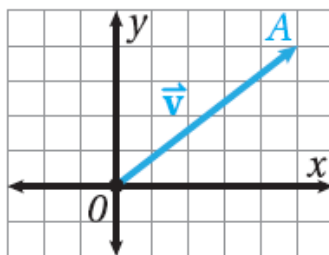
$$\vec{V} = \overline{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$$

متجه الموقع

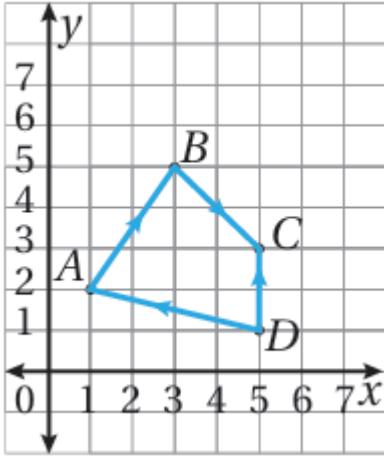
ويسمى للنقطة A التي تقع عند نهايته؛ لأنه يحدد موقعها بالنسبة إلى نقطة الأصل

الوضع القياسي

نقطة بداية المتجه هي نقطة الأصل 0 ، كما في الشكل المجاور



مثال 1



اعتماداً على الشكل المجاور، أكتب المتجهات الآتية بالصورة الإحداثية:

① \overrightarrow{AB}

② \overrightarrow{BC}

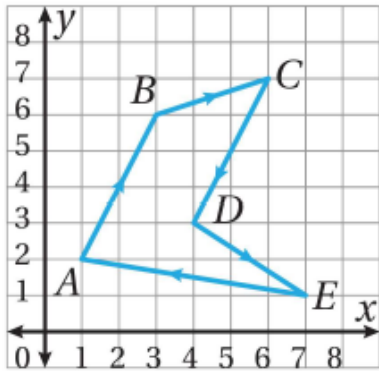
③ \overrightarrow{DC}

أتحقق من فهمي

اعتماداً على الشكل المجاور، أكتب المتجهات الآتية بالصورة الإحداثية:

Ⓐ \overrightarrow{EA}

Ⓑ \overrightarrow{CD}



Ⓒ \overrightarrow{AB}

Ⓓ \overrightarrow{DE}

Ⓔ \overrightarrow{BC}

Ⓕ \overrightarrow{CB}

أتعلم يرمز إلى مقدار المتجه \vec{v} بالرمز $|\vec{v}|$

مقدار المتجه

هو كمية قياسية تمثل طول القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتي بداية المتجه ونهايته.

❖ فإذا كانت $P_1(x_1, y_1)$ هي نقطة بداية \vec{v} ، $P_2(x_2, y_2)$ هي نقطة نهايته، فإنه يُمكن استعمال نظرية فيثاغورس لإيجاد الصيغة الآتية لمقدار المتجه $|\vec{v}|$: $|\vec{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

مفهوم أساسي مقدار المتجه

❖ إذا كانت $P_1(x_1, y_1)$ هي نقطة بداية المتجه \vec{v} ، و $P_2(x_2, y_2)$ هي نقطة نهايته، فإنه يُمكن إيجاد مقداره $|\vec{v}|$ باستعمال الصيغة الآتية:

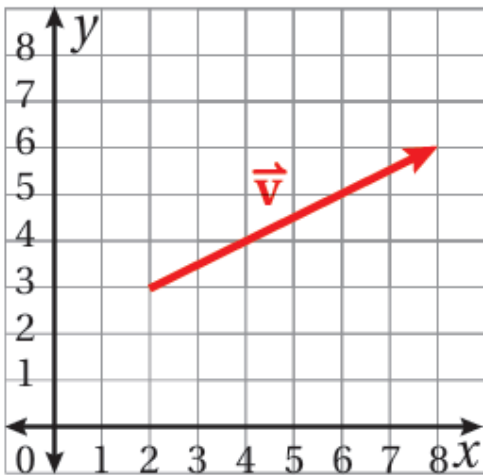
$$|\vec{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

❖ وإذا كان المتجه \vec{v} مكتوباً بالصورة الإحداثية $\vec{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ ، فإنه يُمكن إيجاد مقداره باستعمال الصيغة الآتية:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

مثال 2

① أجد مقدار المتجه \vec{v} في الشكل المجاور.



② أجد مقدار المتجه $\overrightarrow{AB} = \langle 4, -3 \rangle$

أتحقق من فهمي

أجد مقدار كل متجه مما يأتي:

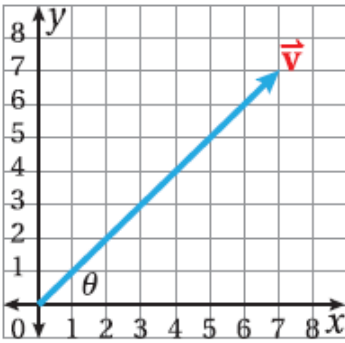
Ⓐ $\overrightarrow{AB} = \langle -1, 4 \rangle$

Ⓑ $\overrightarrow{CD} = \langle 5, -7 \rangle$

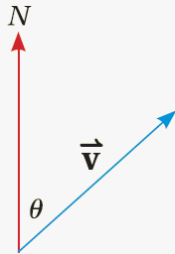
يمكن استعمال النسب المثلثية لإيجاد اتجاه المتجه، وذلك باستعمال المثلث قائم الزاوية الذي يمثل المتجه وترا فيه.

مثال 3

أجد اتجاه \vec{v} في الشكل المجاور.



أتعلم يمكن أيضا التعبير عن اتجاه المتجه بدلالة اتجاهه من الشمال



إرشاد استعمل الآلة الحاسبة العلمية لأجد $\tan^{-1}(1)$ كما يأتي

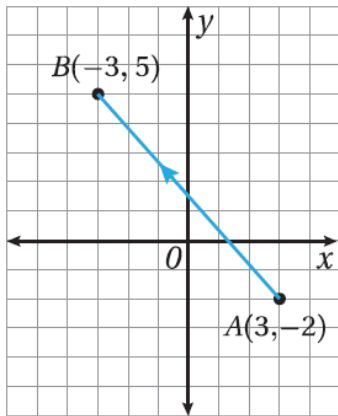
SHIFT

Tan

1

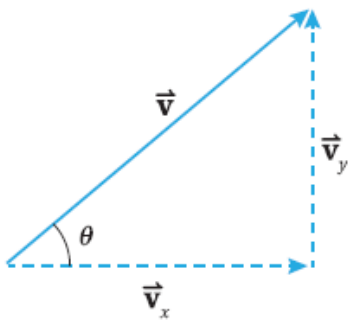
أتحقق من فهمي

أجد اتجاه \overline{AB} في الشكل المجاور.



السرعة المتجهة

هي سرعة في اتجاه مُحدّد ويُمكن تمثيلها بمتجه. في الشكل المجاور، يُمثل المتجه \vec{v} السرعة المتجهة لجسم تحرك في مسار مستقيم، فصنع زاوية قياسها θ مع محور x الموجب، وقد مثل مقدار المتجه $|\vec{v}|$ سرعة هذا الجسم



تُمثل \vec{v}_x المركبة الأفقية للسرعة المتجهة، وتمثل \vec{v}_y المركبة الرأسية لهذه السرعة، حيث $\vec{v} = \langle v_x, v_y \rangle$

يمكن استعمال النسب المثلثية لكتابة المركبتين الأفقية والرأسية للسرعة المتجهة بدلالة الزاوية θ التي تصنعها السرعة المتجهة مع محور x الموجب كما يأتي:

$$\vec{v}_x = |\vec{v}| \cos \theta$$

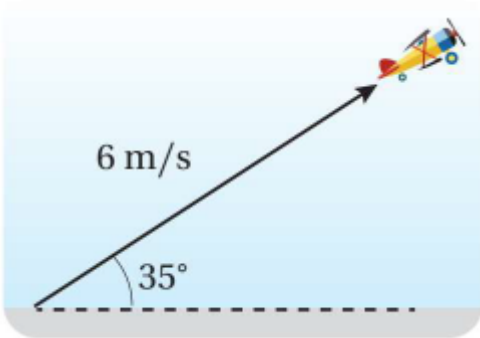
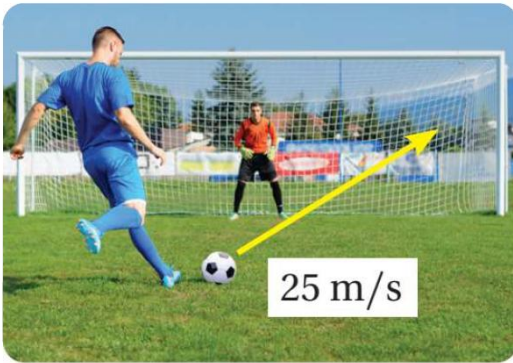
$$\vec{v}_y = |\vec{v}| \sin \theta$$

عندئذ، يمكن كتابة السرعة المتجهة بالصورة الإحداثية كما يأتي:

$$\vec{v} = \langle |\vec{v}| \cos \theta, |\vec{v}| \sin \theta \rangle$$

مثال 4

كرة قدم: ركل ريان كرة بسرعة 25 m/s ، كما في الشكل المجاور، وبزاوية مقدارها 40° مع الأفقي. أكتب المتجه الذي يُمثل السرعة المتجهة للكرة بالصورة الإحداثية.



أتحقق من فهمي

العب: أقلعت طائرة تتحكم فيها ميساء عن بعد، بزاوية قياسها 35° عن سطح الأرض، وبسرعة 6 m/s كما في الشكل المجاور.

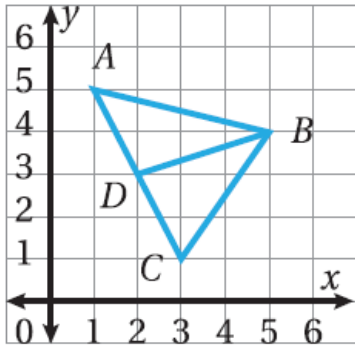
أكتب المتجه الذي يُمثل السرعة المتجهة للطائرة.

أدرب وأحل المسائل

أكتب كل متجه عُلِمَتْ نقطتا بدايته ونهايته في ما يأتي بالصورة الإحداثية. ثم أجدُ مقداره:

- ① $(2,5), (4, -1)$ ② $(-4,7), (-3,0)$ ③ $(6, -2), (8,1)$
 ④ $(4, -9), (3, -5)$ ⑤ $(-1.5,3), (0.5, -4)$ ⑥ $(-6, -\frac{2}{3}), (-2, -\frac{1}{3})$

اعتمادًا على الشكل المجاور، أكتب كلا من المتجهات الآتية بالصورة الإحداثية:



- ⑦ \overrightarrow{AB} ⑧ \overrightarrow{DB}
 ⑨ \overrightarrow{CB} ⑩ \overrightarrow{CA}
 ⑪ \overrightarrow{AC} ⑫ \overrightarrow{DA}

⑬ في السؤال السابق، أبين أن $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{DC}|$. ماذا أستنتج من موقع النقطة D على القطعة المستقيمة \overline{AC} ؟

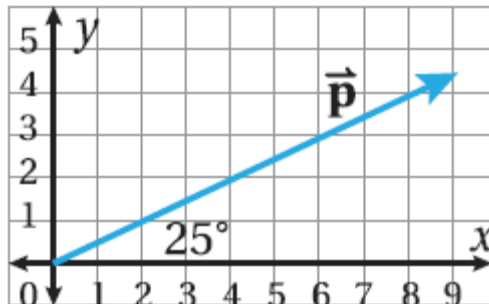
أجدُ مقدار كل متجه مما يأتي:

- ⑭ $\langle 2, -6 \rangle$ ⑮ $\langle 7, -8 \rangle$ ⑯ $\langle -1, -1 \rangle$
 ⑰ $\langle 3, 5 \rangle$ ⑱ $\langle 0, 0 \rangle$ ⑲ $\langle 2, 9 \rangle$

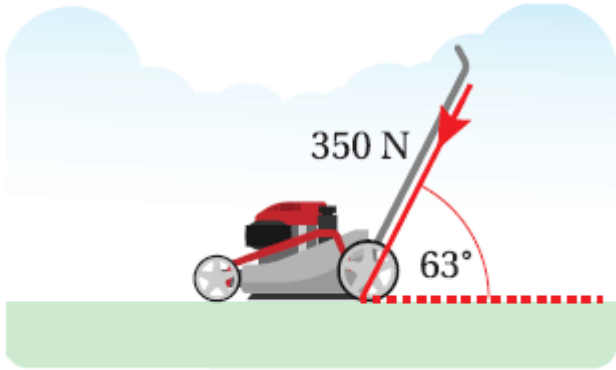
إذا كانت M هي نقطة منتصف \overline{FG} ، حيث $F(4,2)$ و $G(2,6)$ ، وكانت O هي نقطة الأصل، فأكتب كل متجه مما يأتي بالصورة الإحداثية:

- ⑳ \overrightarrow{FG} ㉑ \overrightarrow{GF} ㉒ \overrightarrow{OM}

㉓ أعبر عن اتجاه المتجه \vec{P} في الشكل المجاور بطريقتين.



24 حيوانات: أكتب السرعة المتجهة لثعلب يطارد أرنباً على منحدر بالصورة الإحداثية إذا كانت سرعته الأفقية $v_x = 27 \text{ km/h}$ وسرعته الرأسية $v_y = 25 \text{ km/h}$.

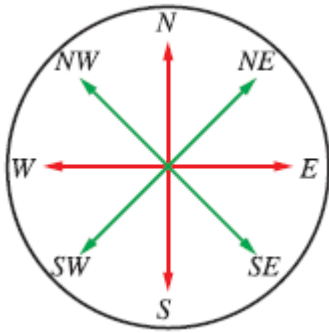


25 فيزياء: تدفع نور عربة بقوة مقدارها 350 N وبزاوية قياسها 63° مع المحور الأفقي. أكتب متجه القوة بالصورة الإحداثية.

26 أكتب المتجه \vec{v} بالصورة الإحداثية إذا كان $|\vec{v}| = 27$ ، وصنع زاوية مقدارها 90° مع محور x .

27 أكتب المتجه \vec{v} بالصورة الإحداثية إذا كان $|\vec{v}| = 10$ ، وصنع زاوية مقدارها 320° مع محور x .

28 خرج عبد الرحمن من منزله، وسار بخط مستقيم شرقاً إلى المسجد مسافة 248 m ، ثم خرج منه مرة أخرى، وسار بخط مستقيم جنوباً نحو منزل صديقه يحيى مسافة 562 m أعبّر عن المسار بين منزل عبد الرحمن و منزل صديقه على شكل متجه بالصورة الإحداثية (إرشاد: البعد بين نقطتين هو أقصر مسافة بينهما).



مهارات التفكير العليا.

29 تحد: إذا كان $|\overline{AB}| = \sqrt{13}$ حيث $A(1,2)$ نقطة بدايته، والنقطة $B(3,y)$ نقطة نهايته، فأجد إحداثي النقطة B ، مبرراً إجابتي.

30 تبرير: ما مجموعة قيم b التي يكون عندها مقدار المتجه $\langle 4, b \rangle$ يساوي 5؟ أبرر إجابتي.

31 أكتشف الخطأ: حسب كل من ناصر وليلى مقدار المتجه $\vec{v} = \langle 6, -1 \rangle$ ، فكانت إجابة كل منهما كما يأتي:

ليلى

$$|\vec{v}| = \sqrt{35}$$

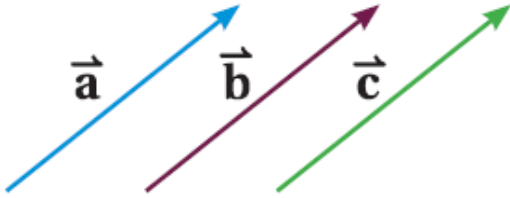
ناصر

$$|\vec{v}| = 37$$

هل إجابة أي منهما صحيحة، مبرراً إجابتي؟

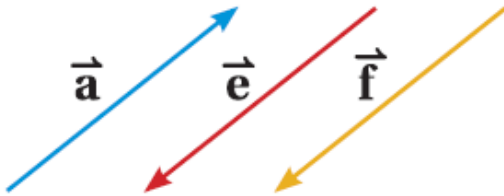
32 مسألة مفتوحة: أرسم متجهاً على المستوى الإحداثي، ثم أكتبه بالصورة الإحداثية، ثم أحد مقداره.

جمع المتجهات وطرحها

الدرس
الثاني

المتجهان المتساويان

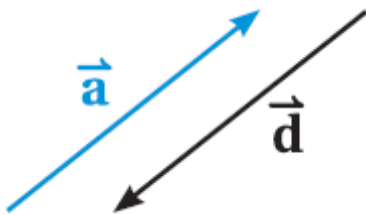
هما متجهان لهما نفس الاتجاه والمقدار .
ففي الشكل المجاور، المتجهات
 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ متساوية، وبالرموز : $\vec{a} = \vec{b} = \vec{c}$



المتجهان المتوازيان

هما متجهان لهما الاتجاه نفسه، أو عكسه، وليس شرطاً أن يكون لهما المقدار نفسه. ففي الشكل المجاور، المتجهات $\vec{a}, \vec{e}, \vec{f}$ متوازية، وبالرموز:

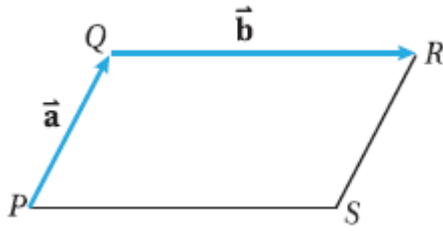
$$\vec{a} \parallel \vec{e} \parallel \vec{f}$$



معكوس المتجه

هو متجه له نفس مقدار متجه آخر، لكنه في اتجاه معاكس له. ففي الشكل المجاور، المتجه \vec{d} معكوس المتجه \vec{a} ، وبالرمز : $\vec{d} = -\vec{a}$ أي إن

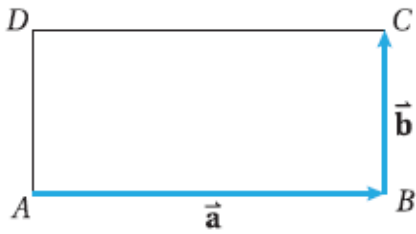
مثال 1



في الشكل المجاور، $QRSP$ متوازي أضلاع، فيه $\vec{PQ} = \vec{a}$ و $\vec{QR} = \vec{b}$. أعبّر عن كلٍّ مما يأتي باستعمال المتجهين \vec{a} و \vec{b} :

- ① \vec{SR} ② \vec{SP} ③ \vec{QP} ④ \vec{RQ}

أتحقق من فهمي



في الشكل المجاور، $ABCD$ مستطيل، فيه $\vec{AB} = \vec{a}$ و $\vec{BC} = \vec{b}$. أعبّر عن كلٍّ مما يأتي باستعمال المتجهين \vec{a} و \vec{b} :

- Ⓐ \vec{AD} Ⓑ \vec{DC} Ⓒ \vec{CB}

جمع المتجهات هندسياً

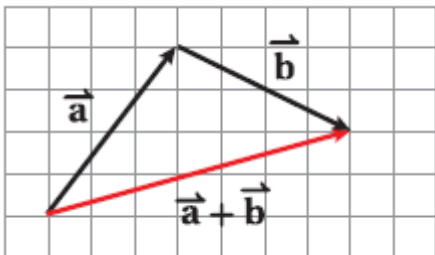
يمكن إيجاد ناتج جمع متجهين أو أكثر هندسياً.

للإيجاد $\vec{a} + \vec{b}$ هندسياً، أتبع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: أرسم المتجه \vec{a} .

الخطوة 2: أرسم المتجه \vec{b} بحيث تكون نقطة بدايته هي نقطة نهاية المتجه \vec{a} .

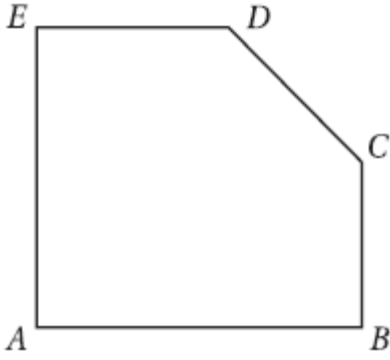
الخطوة 3: أصل بين نقطة بداية المتجه \vec{a} ونقطة نهاية المتجه \vec{b} . فيكون المتجه الناتج هو المتجه $\vec{a} + \vec{b}$.



المحصلة

المتجه الناتج من جمع متجهين أو أكثر وتسمى هذه الطريقة في جمع المتجهات هندسياً قاعدة المثلث

مثال 2



اعتمادا على الشكل المجاور، أكتب المتجه الذي يُمثل ناتج الجمع في كل مما يأتي:

① $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$

② $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC}$

③ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$

④ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$

أتعلم يُسمى المتجه \overrightarrow{AA} المتجه الصفري؛ وهو متجه ليس له مقدار واتجاه.

لأي متجه \vec{a} ، فإن:

$$\vec{a} + 0 = 0 + \vec{a} = \vec{a}$$

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = 0$$

أتحقق من فهمي

اعتمادا على الشكل في المثال 2، أكتب المتجه الذي يُمثل ناتج الجمع في كل مما يأتي:

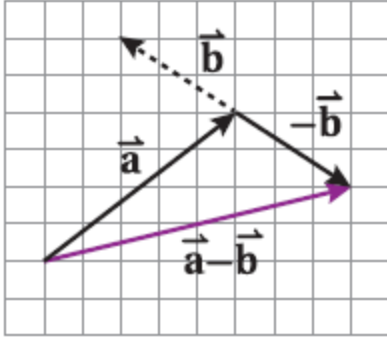
Ⓐ $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CB}$

Ⓑ $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC}$

طرح المتجهات هندسيا

يمكن إيجاد ناتج طرح متجهين أو أكثر هندسيا.

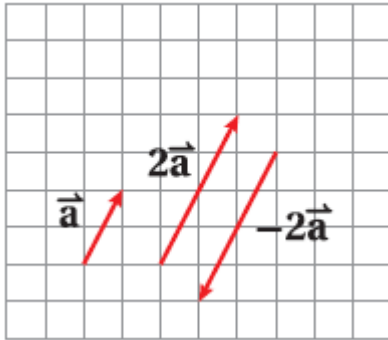
لإيجاد $\vec{a} - \vec{b}$ أجمع المتجه \vec{a} مع معكوس المتجه \vec{b} أي: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$



ولذلك يمكن إيجاد ناتج طرح $\vec{a} - \vec{b}$ هندسيا بطريقة مشابهة لعملية الجمع. وذلك بإيجاد محصلة \vec{a} و $-\vec{b}$ كما في الشكل المجاور.

ضرب المتجه في عدد ثابت هندسيا

ينتج من ضرب المتجه \vec{a} في العدد الحقيقي k متجه مواز للمتجه \vec{a} ويكون للمتجهين $k\vec{a}$ و \vec{a} الاتجاه نفسه إذا كان k عدداً موجبا، واتجاهان متعاكسان إذا كان k عدداً سالبا.

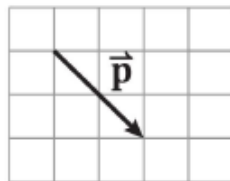
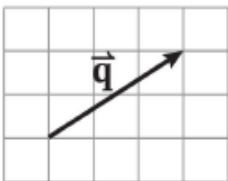


$$2\vec{a} = \vec{a} + \vec{a}$$

$$-2\vec{a} = (-\vec{a}) + (-\vec{a})$$

3 مثال

اعتماداً على الشكل المجاور، أجد هندسيا كلاهما يأتي:



① $2\vec{q} + \vec{p}$

② $\vec{q} - 3\vec{p}$

أتحقق من فهمي

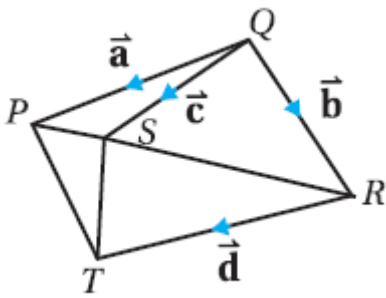
اعتماداً على الشكل في المثال 3، أجد هندسياً كلا مما يأتي :

Ⓐ $\vec{p} + 3\vec{q}$

Ⓑ $3\vec{q} - 2\vec{p}$

Ⓒ $2\vec{q} - \frac{1}{2}\vec{p}$

يمكن استعمال قاعدة المثلث بطريقة عكسية؛ لكتابة متجه يمثل ضلعاً في شكل هندسي بدلالة متجهات تمثل أضلاعاً أخرى في الشكل.



مثال 4

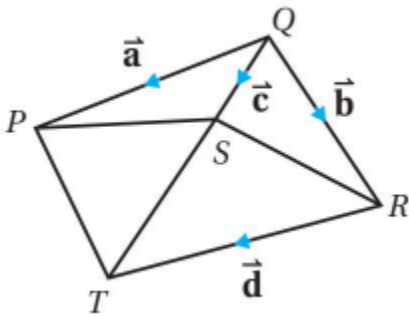
اعتماداً على الشكل المجاور، أكتب كلا من المتجهات الآتية بدلالة $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$.

Ⓐ \vec{PS}

Ⓑ \vec{RP}

Ⓒ \vec{PT}

Ⓓ \vec{TS}



أتحقق من فهمي

اعتماداً على الشكل المجاور، أكتب كلا من المتجهات الآتية بدلالة $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$.

Ⓐ \vec{SR}

Ⓑ \vec{QT}

Ⓒ \vec{PT}

Ⓓ \vec{ST}

جمع المتجهات وطرحها وضربها في ثابت جبريا

يمكن إيجاد ناتج الجمع والطرح والضرب في ثابت للمتجهات المكتوبة بالصورة الإحداثية عن طريق جمع مركباتها الأفقية والرأسية، أو طرحها.

مفهوم أساسي جمع المتجهات وطرحها وضربها في ثابت

إذا كان $\vec{a} = \langle x_1, y_1 \rangle$ و $\vec{b} = \langle x_2, y_2 \rangle$ ، وكان k فُأجِدُ كلاهما يأتي :

$$\vec{a} + \vec{b} = \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2 \rangle \quad \vec{a} - \vec{b} = \langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle \quad k\vec{a} = \langle kx_1, ky_1 \rangle$$

مثال 5

إذا كان $\vec{a} = \langle 3, 1 \rangle$ ، و $\vec{b} = \langle -4, 6 \rangle$ ، و $\vec{c} = \langle -3, -1 \rangle$ ، فُأجِدُ كلاً مما يأتي :

① $\vec{a} + \vec{b}$

② $2\vec{a}$

③ $\vec{c} - \vec{b}$

④ $\vec{a} + \vec{c}$

أتعلم المتجهة \vec{a} هو معكوس المتجه \vec{c} ؛ لأن مجموعهما يساوي المتجه الصفري ؛ أي إنَّ :
 $\vec{a} + \vec{c} = 0$

أتحقق من فهمي

إذا كان $\vec{a} = \langle 3, 1 \rangle$ ، و $\vec{b} = \langle -2, 7 \rangle$ ، و $\vec{c} = \langle 0, -5 \rangle$ كان فُأجِدُ كلاهما يأتي :

① $-\vec{b}$

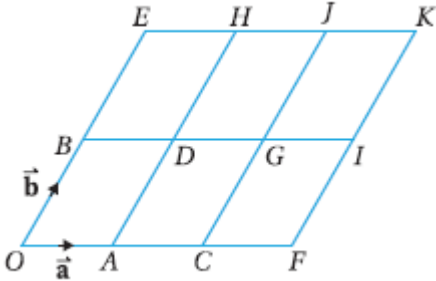
② $4\vec{c}$

③ $\vec{b} - \vec{c}$

④ $4\vec{a} + 3\vec{c}$

أُتدرب وأحل المسائل

أحد كلا مما يأتي اعتماداً على الشكل المجاور الذي يتكون من متوازيات أضلاع صغيرة متطابقة:



① ثلاثة متجهات مساوية للمتجهة \vec{a}

② ثلاثة متجهات موازية للمتجه \vec{b}

③ ثلاثة متجهات معاكسة للمتجهة \vec{a}

④ ثلاثة متجهات مساوية للمتجه \overrightarrow{OD}

⑤ ثلاثة متجهات مساوية للمتجه \overrightarrow{OG}

باستعمال الشكل الوارد في السؤال السابق، أكتب كلاً من المتجهات الآتية بدلالة \vec{a} و \vec{b} .

⑦ متجه الموقع للنقطة E

⑥ المتجه \overrightarrow{OC}

⑧ المتجه \overrightarrow{OG}

⑧ متجه الموقع للنقطة F

⑩ المتجه \overrightarrow{OK}

⑩ المتجه \overrightarrow{AG}

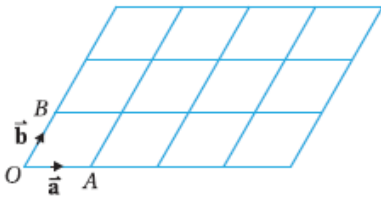
إذا كان $\vec{a} = \langle 34, -86 \rangle$ و $\vec{b} = \langle -65, 17 \rangle$ و $\vec{c} = \langle 9, -1 \rangle$ ، فأجدُ كلاً مما يأتي:

⑫ $\vec{a} + \vec{c}$

⑬ $\vec{b} - \vec{a}$

⑭ $3\vec{c} + \vec{b}$

⑮ $\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$



أنسخ الشكل المجاور الذي يتكون من متوازيات أضلاع صغيرة متطابقة،

ثم أحدد عليه مواقع النقاط C, D, E, F بحيثُ تحقق كلا مما يأتي:

⑯ $\overrightarrow{OC} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$

⑰ $\overrightarrow{OD} = 2\vec{a} + \vec{b}$

⑱ $\overrightarrow{OE} = 4\vec{a}$

⑲ $\overrightarrow{OF} = 4\vec{a} + 2\vec{b}$

⑳ إذا كان $\langle 7, -5 \rangle = \langle 3x - y, y - x^2 \rangle$ ، فما قيمة كل من x و y؟

إذا كان $\vec{e} = \langle -3, -2 \rangle$ و $\vec{f} = \langle 2, 4 \rangle$ فأمثلُ كلا من المتجهات الآتية على المستوى الإحداثي:

㉑ $\vec{e} + \vec{f}$

㉒ $3\vec{f}$

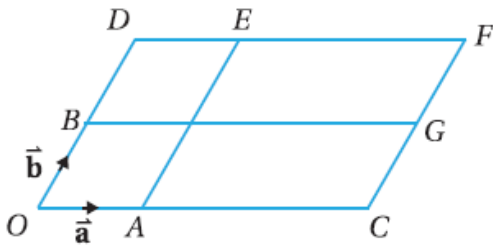
㉓ $\vec{e} - \vec{f}$

㉔ $\vec{f} - \vec{e}$

㉕ $4\vec{e}$

㉖ $2\vec{f} + \vec{e}$

27) إذا كان $\vec{d} = \langle 5, 9 \rangle$ و $\vec{e} = \langle 11, -8 \rangle$ ، فأجد $|4\vec{d} - 3\vec{e}|$ ، $|\frac{1}{3}\vec{e}|$



يتكون الشكل المجاور من مجموعتين من المستقيمات المتوازية، إذا كان $\vec{OC} = 3\vec{OA}$ ، $\vec{OD} = 2\vec{OB}$ فأكتب كلاً من المتجهات الآتية بدلالة \vec{a} و \vec{b}

28) \vec{OF}

29) \vec{OG}

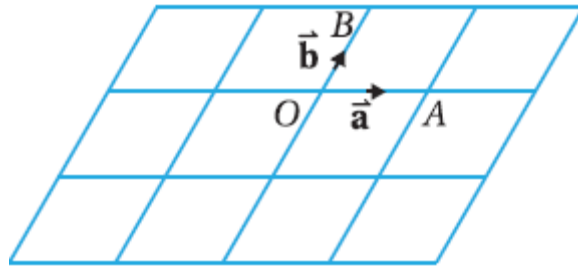
30) \vec{EG}

31) \vec{CE}

32) اعتماداً على الشكل السابق أعدد متجهين كل منهما يساوي $(3\vec{a} - \vec{b})$

33) نزهة بحرية: أبحر قارب سياحي مسافة 40 km جنوباً، ثم تحرك مسافة 70 km في اتجاه الشرق. أستعمل جمع المتجهات لأكتب متجها يمثل محصلة رحلة القارب وأجد بعده عن نقطة انطلاقه.

أنسخ الشكل المجاور المكون من متوازيات أضلاع صغيرة متطابقة، ثم أعدد عليه مواقع النقاط C, D, E, F, G, H, I, J بحيث تحقق كلاهما يأتي:



34) $\vec{OC} = 2\vec{a} - \vec{b}$

35) $\vec{OD} = 2\vec{a} + \vec{b}$

36) $\vec{OE} = \vec{a} - 2\vec{b}$

37) $\vec{OF} = \vec{b} - 2\vec{a}$

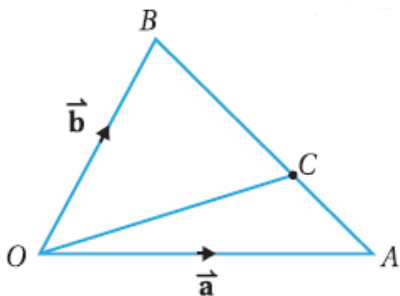
38) $\vec{OG} = -\vec{a}$

39) $\vec{OH} = -\vec{a} - 2\vec{b}$

40) $\vec{OI} = 2\vec{a} - 2\vec{b}$

41) $\vec{OJ} = -\vec{a} + \vec{b}$

في الشكل المجاور إذا كانت C تقسم \vec{AB} بنسبة 5 : 2 فأكتب كلاً من المتجهات الآتية بدلالة \vec{a} و \vec{b}

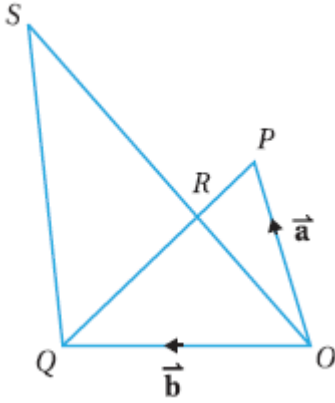


42) \vec{AB}

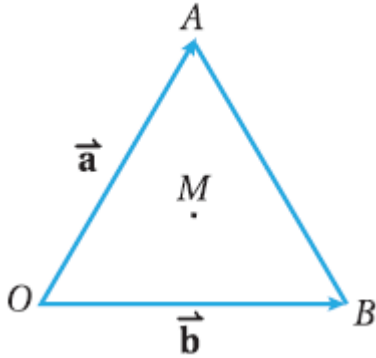
43) \vec{AC}

44) \vec{OC}

مهارات التفكير العليا.



45) برهان: في الشكل المجاور، إذا كانت R تقسم كلا من \overline{PQ} و \overline{OS} بنسبة 1:2، وكان $\overline{OP} = \vec{a}$ و $\overline{OQ} = \vec{b}$ ، فأثبت أن المتجهين \overline{OS} و \overline{QP} متوازيين.



تحد: يظهر في الشكل المجاور المثلث متطابق الأضلاع OAB الذي مركزه النقطة M ؛ ما يعني أن المستقيم الواصل بين رأس المثلث والنقطة M عمودي على الضلع المقابل :

46) أكتب المتجه \overline{AB} بدلالة \vec{a} و \vec{b}

47) أثبت أن $\overline{OM} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b})$

الضرب القياسي

الدرس
الثالث

تعرفت سابقاً العمليات على المتجهات، مثل ضرب متجه في عدد ثابت، وسأتعرف في هذا الدرس كيفية إيجاد ناتج ضرب متجهين الضرب القياسي (scalar product) هو عملية جبرية بين متجهين، تنتج منها كمية قياسية يُرمز إليها بالرمز $\vec{v} \cdot \vec{w}$ ، وتُقرأ: $\vec{v} \text{ dot } \vec{w}$

مفهوم أساسي الضرب القياسي

إذا كان $\vec{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ و $\vec{w} = \langle w_1, w_2 \rangle$ ، فإن $\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2$

مثال 1

إذا كان $\vec{v} = \langle 2, 8 \rangle$ و $\vec{w} = \langle -5, 4 \rangle$ ، فأجد $\vec{v} \cdot \vec{w}$:

أتحقق من فهمي

إذا كان $\vec{v} = \langle -3, 2 \rangle$ و $\vec{u} = \langle 6, 9 \rangle$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

Ⓐ $\vec{u} \cdot \vec{v}$

Ⓑ $\vec{v} \cdot \vec{u}$

Ⓒ $\vec{u} \cdot \vec{u}$

تعرفت سابقاً أنه إذا كان $\vec{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ و $\vec{w} = \langle w_1, w_2 \rangle$ ، فإن

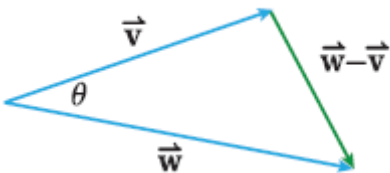
طول المتجه المرسوم باللون الأخضر في الشكل المجاور هو

$$|\vec{w} - \vec{v}|، حيثُ: |\vec{w} - \vec{v}| = \langle w_1 - v_1, w_2 - v_2 \rangle$$

وباستعمال قانون جيبس التمام، فإن:

$$|\vec{w} - \vec{v}|^2 = |\vec{w}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{w}||\vec{v}| \cos \theta$$

$$(w_1 - v_1)^2 + (w_2 - v_2)^2 = w_1^2 + w_2^2 + v_1^2 + v_2^2 - 2|\vec{w}||\vec{v}| \cos \theta$$



$$2w_1v_1 + v_1^2 + w_2^2 - 2w_2v_2 + v_2^2 = w_1^2 + w_2^2 + v_1^2 + v_2^2 - 2|\vec{w}||\vec{v}| \cos \theta$$

$$-2w_1v_1 - 2w_2v_2 = -2|\vec{w}||\vec{v}| \cos \theta$$

بالتبسيط

$$w_1v_1 + w_2v_2 = |\vec{w}||\vec{v}| \cos \theta$$

بالتبسيط

$$v_1w_1 + v_2w_2 = |\vec{v}||\vec{w}| \cos \theta$$

الخاصية التبادلية

$$\cos \theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{v}$$

ولذلك ، فإن

مفهوم أساسي الزاوية بين متجهين

يمكن إيجاد قياس الزاوية θ بين المتجهين \vec{a} و \vec{b} حيث $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ باستعمال الصيغة الآتية:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta$$

أتعلم الزاوية بين متجهين هي الزاوية الصغرى المحصورة بينهما عند رسمهما بدءاً بالنقطة نفسها، أي إن: $0 \leq \theta \leq \pi$

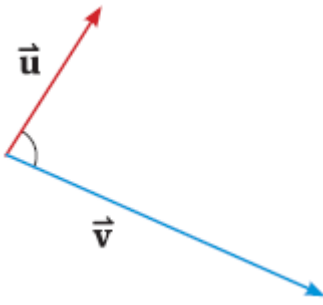
2

مثال

أجد قياس الزاوية θ المحصورة بين المتجهين $\vec{a} = \langle 6, 8 \rangle$ و $\vec{b} = \langle 3, 4 \rangle$

أتحقق من فهمي

أجدُ قياس الزاوية θ المحصورة بين المتجهين $\vec{v} = \langle 2, 7 \rangle$ و $\vec{u} = \langle -1, 1 \rangle$



إذا كان \vec{a} و \vec{b} متجهين غير صفرين، وكانت الزاوية المحصورة بينهما قائمة، فإن المتجهين يكونان متعامدين، ويكون ناتج ضربهما القياسي صفراً؛ لأن $\cos 90^\circ = 0$

مثال 3

أحدد إذا كان المتجهان $\vec{v} = \langle -6, 4 \rangle$ و $\vec{u} = \langle 2, 3 \rangle$ متعامدين أم لا .

أتحقق من فهمي

أحدد إذا كان المتجهان $\vec{v} = \langle 3, -5 \rangle$ و $\vec{u} = \langle 1, 0 \rangle$ متعامدين أم لا .

توجد تطبيقات عملية عدة على الضرب القياسي للمتجهات، أهمها حساب الشغل W الناتج من تأثير قوة ثابتة F بزاوية محددة θ على جسم ما؛ لتحريكه من نقطة إلى أخرى مسافة مقدارها d وحدة.

الشغل

هو كمية قياسية تساوي ناتج الضرب القياسي لمتجه القوة في متجه الإزاحة، ووحدة قياسه هي جول (J). يُمكن إيجاد مقدار الشغل باستعمال الصيغة الآتية: $W = |\vec{F}||\vec{d}| \cos \theta$

مثال 4

فيزياء: سحب عامل صندوقاً بقوة مقدارها $\vec{F} = 13 \text{ N}$ وبذل شغلاً مقداره $W = 20 \text{ J}$ لسحب الصندوق مسافة أفقية مقدارها $\vec{d} = 18 \text{ m}$. ما قياس الزاوية المحصورة بين قوة السحب واتجاه المسافة المقطوعة (بإهمال قوة الاحتكاك) لأقرب جزء من عشرة؟



أتحقق من فهمي

سحب منذر عربة، فبذل شغلاً مقداره 13 J ، بقوة مقدارها 50 N ، مسافة $\vec{d} = 30 \text{ m}$. ما قياس الزاوية المحصورة بين قوة السحب واتجاه المسافة المقطوعة (بإهمال قوة الاحتكاك) لأقرب جزء من عشرة؟



أُتدرب وأحل المسائل

أجد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كل مما يأتي:

① $\vec{a} = \langle 6, 8 \rangle, \vec{b} = \langle 4, -3 \rangle$

② $\vec{u} = \langle -3, 11 \rangle, \vec{v} = \langle -9, 4 \rangle$

③ $\vec{c} = \langle -12, 43 \rangle, \vec{v} = \langle 22, 14 \rangle$

④ $\vec{d} = \langle 21, 32 \rangle, \vec{e} = \langle -21, 25 \rangle$

⑤ إذا كان $|\vec{a}| = 9$ و $|\vec{b}| = 6$ ، وكان قياس الزاوية المحصورة بين \vec{a} و \vec{b} هو 42° ، فأجد ناتج $\vec{a} \cdot \vec{b}$

⑥ إذا كان $|\vec{a}| = 34$ و $|\vec{b}| = 76$ ، وكان قياس الزاوية المحصورة بين \vec{a} و \vec{b} هو 120° ، فأجد ناتج

$\vec{a} \cdot \vec{b}$

⑦ أجد قياس الزاوية بين المتجهين $\vec{a} = \langle 7, 10 \rangle$ و $\vec{b} = \langle 4, -10 \rangle$ لأقرب جزء من عشرة.

أجد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كل مما يأتي. ثم أجد قياس الزاوية المحصورة بينهما:

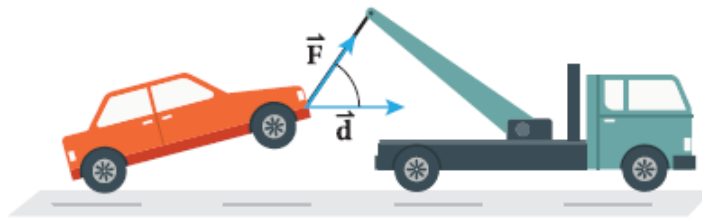
⑧ $\vec{c} = \langle 2, 4 \rangle, \vec{d} = \langle -24, 12 \rangle$

⑨ $\vec{a} = \langle 4, 16 \rangle, \vec{k} = \langle 8, -2 \rangle$

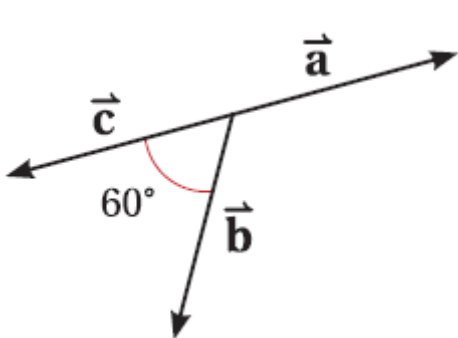
⑩ أحدد إذا كان المتجهان $\vec{e} = \langle 3, 4 \rangle$ و $\vec{a} = \langle 11, -8 \rangle$ متعامدين أم لا، مبرراً إجابتي.

⑪ إذا كان $\vec{r} = \langle 3, -4 \rangle$ و $\vec{s} = \langle b, b + 2 \rangle$ متجهين متعامدين، فأجد قيمة b .

⑫ سيارات: تسحب شاحنة سيارة كما في الشكل المجاور. إذا كان مقدار قوة السحب $|\vec{F}| = 34N$ ، والمسافة المقطوعة $|\vec{d}| = 12 km$ ، وشغل الشاحنة المبذول $W = 46J$ فأجد قياس زاوية السحب.



في الشكل المجاور، إذا كان $|\vec{a}| = 2$ و $|\vec{c}| = 5$ ، فأجد كلاً مما يأتي :



⑬ $\vec{a} \cdot \vec{b}$

⑭ $\vec{b} \cdot \vec{c}$

⑮ $\vec{a} \cdot \vec{c}$

مهارات التفكير العليا

برهان: إذا كانت $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ متجهات، وكان $\vec{0}$ المتجه الصفري، فأثبت صحة كل مما يأتي:

$$\textcircled{16} \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\textcircled{17} \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$\textcircled{18} \vec{0} \cdot \vec{a} = 0$$

19) مسألة مفتوحة: إذا كان $\vec{p} \cdot \vec{q} = 30$ و $\vec{q} = \langle 6, 2 \rangle$ ، فأجد قيمة محتملة للمتجه \vec{p} .

20) مسألة مفتوحة: أجد متجها يُعامد المتجه $\vec{a} = \langle -8, -2 \rangle$

21) تبرير: أبين باستعمال المتجهات أن المثلث الذي رؤوسه النقاط: $(6, -2), (1, 5), (-4, -2)$ متطابق الضلعين ثم أحد قياسات جميع زواياه، مبرراً إجابتي.

22) تبرير: إذا كان المتجهان $\vec{a} = \langle -1, r \rangle$ و $\vec{b} = \langle 2, -3 \rangle$ متوازيين، فما قيمة r ؟

اختبار نهاية الوحدة

أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في ما يأتي:

① إذا كان $\vec{v} = \langle 1, -1 \rangle$ ، فإن $|\vec{v}|$ تساوي :

- Ⓐ 0 Ⓑ 1 Ⓒ 2 Ⓓ $\sqrt{2}$

② إذا كان $A(2,5), B(-1,7)$ ، فإن \overline{BA} هو:

- Ⓐ $\langle 3, -2 \rangle$ Ⓑ $\langle -2, 3 \rangle$ Ⓒ $\langle -3, 2 \rangle$ Ⓓ $\langle 3, 2 \rangle$

③ العبارة الصحيحة في ما يأتي هي:

- Ⓐ مقدار المتجه $\langle 2, 4 \rangle$ يساوي 20
 Ⓑ مقدار المتجه $\langle -4, 10 \rangle$ يساوي $\sqrt{84}$
 Ⓒ مقدار المتجه $\langle 4, -3 \rangle$ يساوي $\sqrt{7}$
 Ⓓ مقدار المتجه $\langle -6, 8 \rangle$ يساوي 10

④ إذا كانت $A(0,2), B(3,y)$ ، وكان $|\overline{AB}| = 3\sqrt{2}$ فإن y تساوي:

- Ⓐ 5 Ⓑ -1 Ⓒ 5, -1 Ⓓ 7, -3

إذا كان $\vec{v} = \langle 1, 5 \rangle$ و $\vec{u} = \langle -3, -1 \rangle$ ، فأجيب عن الأسئلة: 5, 6, 7:

⑤ $\vec{v} - \vec{u}$ تساوي:

- Ⓐ $\langle -2, 4 \rangle$ Ⓑ $\langle 4, 6 \rangle$ Ⓒ $\langle -4, -6 \rangle$ Ⓓ $\langle -2, -4 \rangle$

⑥ إذا كان $\vec{p} = \vec{u} + 2\vec{v}$ ، فإن $|\vec{p}|$ تساوي :

- Ⓐ 0 Ⓑ $\sqrt{80}$ Ⓒ 82 Ⓓ $\sqrt{82}$

⑦ معكوس المتجه $\vec{u} + \vec{v}$ هو :

- Ⓐ $\langle -2, 4 \rangle$ Ⓑ $\langle 2, -4 \rangle$ Ⓒ $\langle 4, 6 \rangle$ Ⓓ $\langle -4, -6 \rangle$

⑧ إذا كان $\vec{a} = \langle 2, -3 \rangle, \vec{b} = \langle 3, 4 \rangle$ ، فإن $\vec{a} \cdot 2\vec{b}$ تساوي:

- Ⓐ -6 Ⓑ 6 Ⓒ -12 Ⓓ 12

إذا كانت النقاط A, B, C, D نقاطا في المستوى الإحداثي، حيث $A(4, -1), B(2, -3), D(7, 1)$ ، فأجدُ

إحداثي النقطة C إذا كان:

⑨ $\overline{AC} = -2\overline{AB}$

⑩ $\overline{DC} = \frac{1}{3}\overline{DB}$

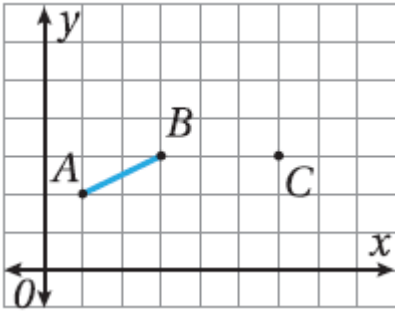
أحدد في ما يأتي العبارات الصحيحة، مُصححاً الخطأ في غير الصحيح منها :

⑪ المتجهان المتساويان لهما نفس المقدار.

⑫ المتجهان المتوازيان لهما نفس المقدار والاتجاه.

⑬ لأي متجهين \vec{u} و \vec{v} ، فإن $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

أنسخ الرسم البياني الآتي، ثم أستعمله لأجيب عن الأسئلة التي تليه:



⑭ إذا كان $\vec{AE} = 2\vec{AB}$ ، فأحدد النقطة E على المستوى الإحداثي.

⑮ إذا كان $\vec{CD} = -2\vec{AB}$ ، فأحدد النقطة D على المستوى الإحداثي.

⑯ إذا كان $\vec{AB} = 2\vec{AM}$ ، فأحدد النقطة M على المستوى الإحداثي.

⑰ إذا كانت $\vec{DC} = k\vec{AM}$ ، فأجد قيمة الثابت k .

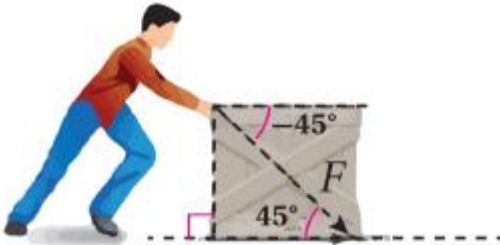
إذا كان $\vec{u} = \langle -1, 5 \rangle$ و $\vec{v} = \langle 2, -1 \rangle$ و $\vec{w} = \langle 4, -2 \rangle$ ، فأجد كلا مما يأتي:

⑱ $-3(\vec{v} - \vec{w})$

⑲ $\vec{v} \cdot 2\vec{u}$

⑳ $\vec{w} \cdot (\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{w})$

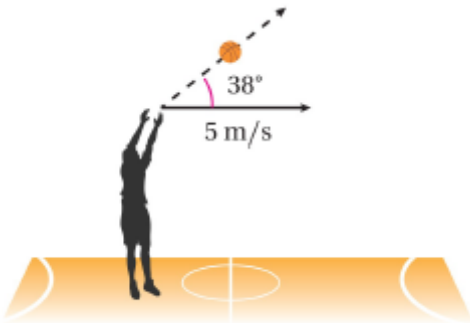
㉑ الزاوية بين المتجهين \vec{v} و \vec{w} .



㉒ دفع عامل صندوقاً بقوة $78N$ ، وبزاوية -45° كما في

الشكل التالي. أجد مقدار الشغل الذي بذله العامل لتحريك

الصندوق مسافة 12 m



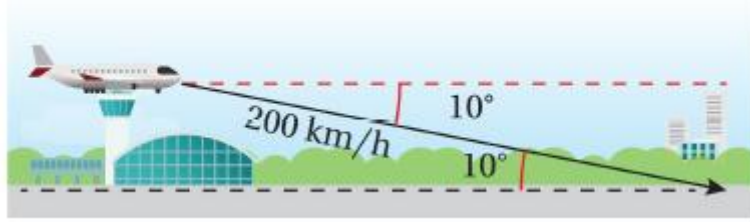
㉓ ركض حسام في اتجاه السلة في أثناء مباراة دوري كرة

السلة بسرعة أفقية مقدارها 5 m/s ، وقذف الكرة بسرعة

مقدارها 20 m/s ، وبزاوية قياسها 38° مع الأفقي. أجد

محطة سرعة الكرة.

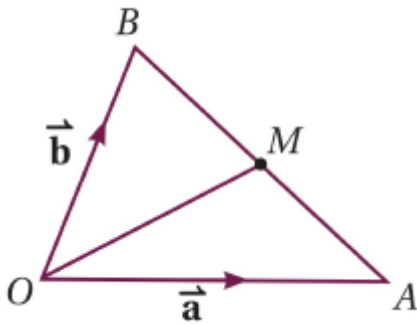
24 هبطت طائرة بسرعة مقدارها 200 km/h ، وبزاوية انخفاض قياسها 10° . أكتب السرعة المتجهة للطائرة بالصورة الإحداثية.



25 أقلعت طائرتان معا من المطار في الوقت نفسه. وقد رصد برج المراقبة حركة الطائرتين، فوجد بعد ثوان عدة أن $\vec{a} = \langle 6, 8 \rangle$ يُمثل مسار الطائرة الأولى، وأن $\vec{b} = \langle 4, -3 \rangle$ يُمثل مسار الطائرة الثانية. هل يتعامد مسارا الطائرتين؟ أبرر إجابتي.

تدريب على الاختبارات الدولية

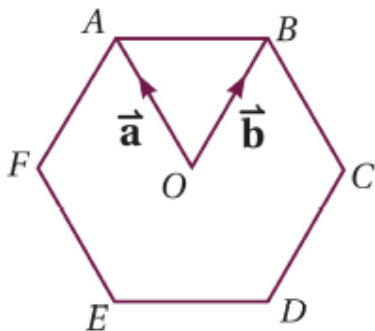
26 أجد الزاوية θ بين المتجهين \vec{p} و \vec{q} إذا كان $\vec{p} = \langle 5, -1 \rangle$, $\vec{q} = \langle -2, 3 \rangle$



يُمثل الشكل المجاور المتجهين \vec{OA} و \vec{OB} المرسومين في الوضع القياسي، حيث O نقطة الأصل، و M نقطة منتصف القطعة المستقيمة \overline{AB} .

27 أكتب المتجه \overline{AB} بدلالة \vec{a} و \vec{b} .

28 أبرهن أن $\overline{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$



الشكل المجاور هو سداسي منتظم، مركزه O ، وفيه $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$.

29 أكتب المتجه \overline{AB} بدلالة \vec{a} و \vec{b} .

30 إذا مد \overline{AB} على استقامته حتى النقطة K بحيث كانت $AB: BK = 1: 2$

فأكتب المتجه \overline{CK} بدلالة \vec{a} و \vec{b} .

أشكال الانتشار

الدرس
الأول

يتعين علينا في كثير من المواقف الحياتية استكشاف العلاقة بين مجموعتين من البيانات، ووصف هذه العلاقة. ومن الأمثلة على ذلك:

- طول الإنسان ومُعدّل نبضات قلبه.
- تحصيل الطلبة في الرياضيات وتحصيلهم في العلوم.

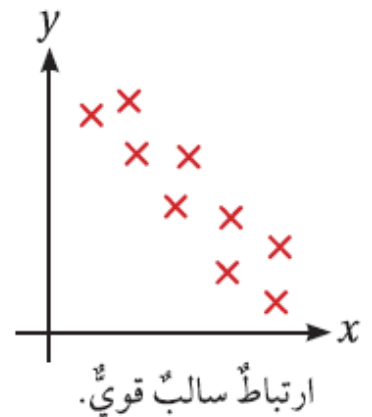
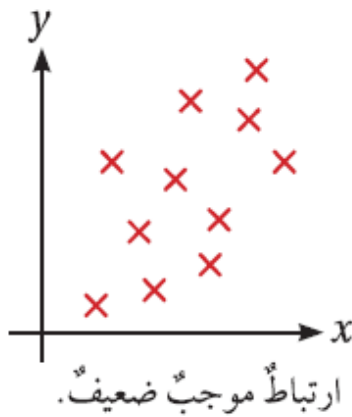
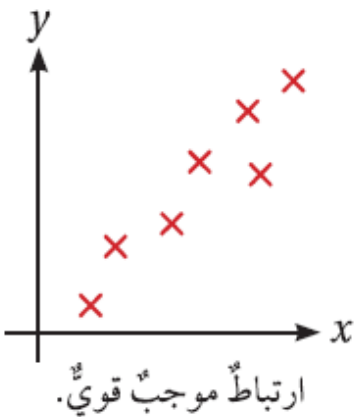
شكل الانتشار

هو تمثيل بياني يوضّح العلاقة (إنْ وُجِدَتْ) بين مجموعتين من البيانات، وتظهر فيه نقاط تمثل بيانات المجموعتين بوصفها أزواجاً مُرتَبَةً (x, y) في المستوى الإحداثي؛ إذ تُمثل بيانات المتغير x على المحور الأفقي الموجب، وتمثل بيانات المتغير y على المحور الرأسّي الموجب

أتعلم ألاحظ عدم وجود حاجة إلى الأجزاء السالبة من المحاور في المستوى الإحداثي؛ لأن النقاط التي تمثل شكل الانتشار موجبة

الارتباط

هو وصف العلاقة بين مجموعتي البيانات، وقد يكون الارتباط موجباً أو سالباً أو قوياً، أو ضعيفاً، كما في أشكال الانتشار الآتية



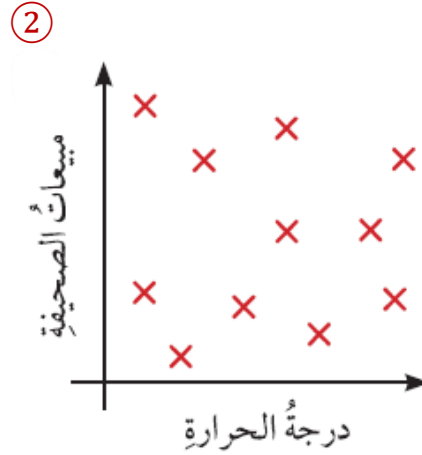


من الملاحظ أنه كلما كان الارتباط موجبا قويا تجمعت النقاط في شكل الانتشار حول مستقيم ميله موجب، وأنه كلما كان الارتباط سالبا قويا تجمعت النقاط في شكل الانتشار حول مستقيم ميله سالب.

أما إذا كان الارتباط ضعيفاً (أو لا يوجد ارتباط)، فإن النقاط في شكل الانتشار تكون متناثرة ومتباعدة كما في شكل الانتشار المجاور، الذي يُظهر العلاقة بين تحصيل مجموعة من الطلبة في مادة الرياضيات والزمن الذي استغرقه كل منهم في الجري مسافة 300 mm

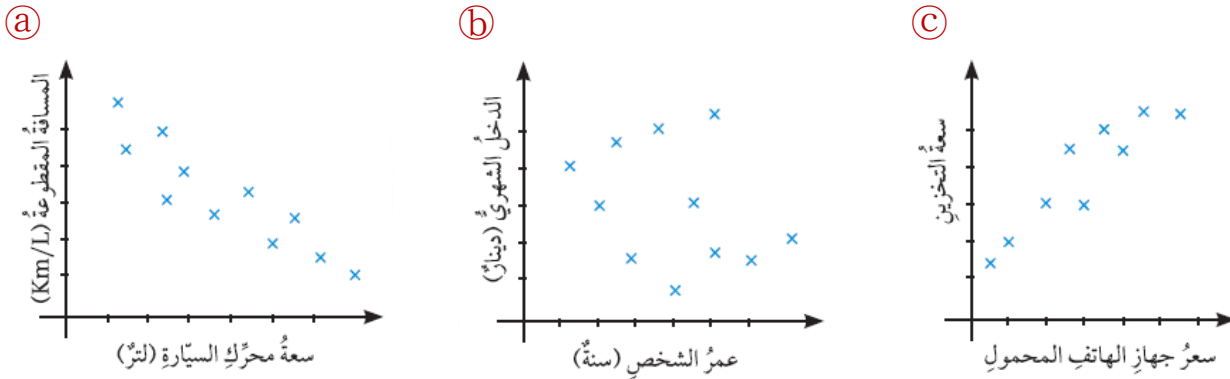
مثال 1

هل يوجد ارتباط بين بيانات المتغيرين المُمثلين في كل من شكلي الانتشار الآتين؟ في حالة وجود ارتباط بينها، هل هو موجب أم سالب؟ هل هو قوي أم ضعيف؟



أتحقق من فهمي

هل يوجد ارتباط بين بيانات المتغيرين المُمثلين في كل شكل من أشكال الانتشار الآتية؟ في حالة وجود ارتباط بينها ، هل هو موجب أم سالب ؟ هل هو قوي أم ضعيف ؟



عند تمثيل مجموعتين من البيانات بمتغيرين مثل (x) و (y) ، يمكن تمثيل شكل الانتشار يدويا، أو باستعمال برمجية جيوغبرا، وذلك بتعيين نقاط شكل الانتشار بوصفها أزواجا مُرتبة (x, y) : لآتمكن من وصف الارتباط (إن وُجد).

مثال 2

أمثل البيانات في الجدول الآتي على شكل انتشار، ثم أصف الارتباط بين المتغيرين (x) و (y) :

مدة الاستحمام (x) بالدقائق للشخص ، وكمية المياه المستهلكة (y) بالتر.									
الشخص	A	B	C	D	E	E	G	H	I
x	15	18	12	19	16	17	11	15	13
y	18	20	12	17	14	19	10	10	15

أتحقق من فهمي

أمثل البيانات في الجدول الآتي على شكل انتشار ، ثم أصف الارتباط بين المتغيرين (x) و (y) :

سعر السيارة (x) بألوف الدنانير ، وعمر السيارة (y) بالسنوات.										
السيارة	A	B	C	D	E	E	G	H	I	J
x	10.5	10	10.2	9.5	9.4	10.1	9.5	7	6	5.5
y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

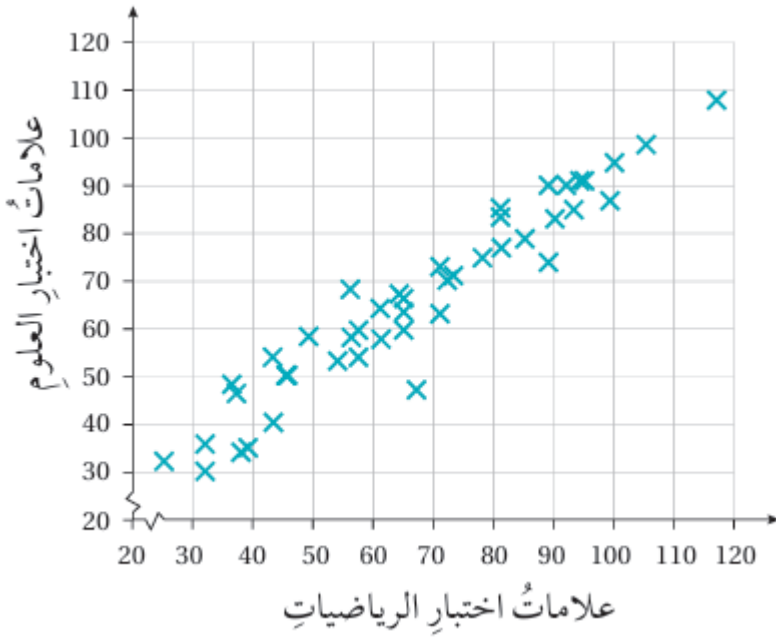
المستقيم الأفضل مطابقة

هو مستقيم يمر بأكبر عدد من نقاط شكل الانتشار، بحيث يكون عدد النقاط التي لا يمر بها متساويا (تقريبا) على جهتيه، وتكون أقصر المسافات بينه وبين النقاط التي لا يمر بها متساوية (تقريبا).

يستعمل المستقيم الأفضل مطابقة لتقدير قيمة أحد المتغيرين في شكل الانتشار ذي الارتباط القوي بمعلومية قيمة المتغير الآخر.

أتعلم عند عدم الحاجة إلى بدء المحاور في التمثيل البياني من نقطة الأصل، توضع قبل قيم البدء للمحورين خطوط متعرجة تدل على إهمال جزء من المحورين الإحداثيين

مثال 3



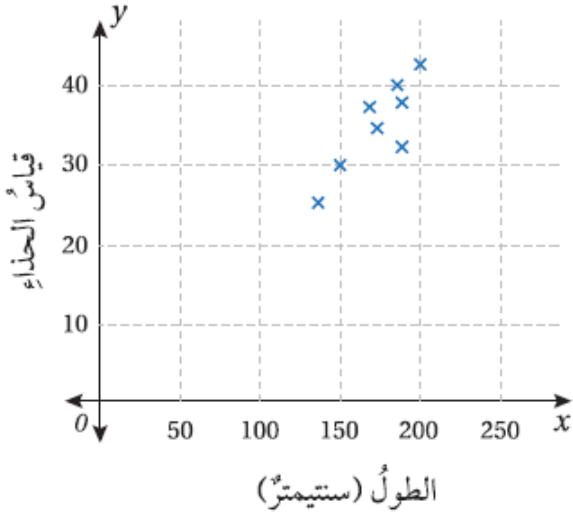
اعتماداً على شكل الانتشار المجاور الذي يُمثل علامات اختبار الرياضيات وعلامات اختبار العلوم المجموعة من الطلبة، أجب عن الأسئلة الآتية:

- ① أرسم المستقيم الأفضل مطابقة للبيانات الممثلة في شكل الانتشار.

② علامة طالب في اختبار الرياضيات 75 ، لكنه غاب عن اختبار العلوم بسبب مرضه. أستعمل المستقيم الأفضل مطابقة الذي رسمته لتقدير علامته المحتملة في مادة العلوم.

③ أجدُ معادلة المستقيم الأفضل مطابقة.

أتحقق من فهمي



اعتماداً على شكل الانتشار المجاور الذي يُمثل الطول (x) بالسنتيمتر، وقياس الحذاء (y) لمجموعة من الأشخاص، أجب عما يأتي:

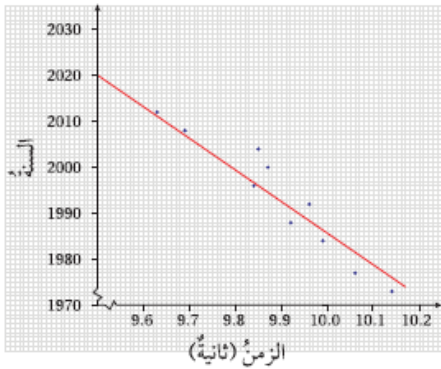
Ⓐ أرسم المستقيم الأفضل مطابقة، ثم أجد معادلته.

Ⓑ أقدر قياس الحذاء لشخص طوله 190 cm

من المحاذير التي يجب التنبه لها، استعمال شكل الانتشار لعمل استنتاجات؛ فشكل الانتشار يكون مفيداً فقط ضمن مدى القيم المعطاة. أما في حال الخروج عن هذا المدى فقد تكون الاستنتاجات مضللة، أو غير منطقية.

4

مثال

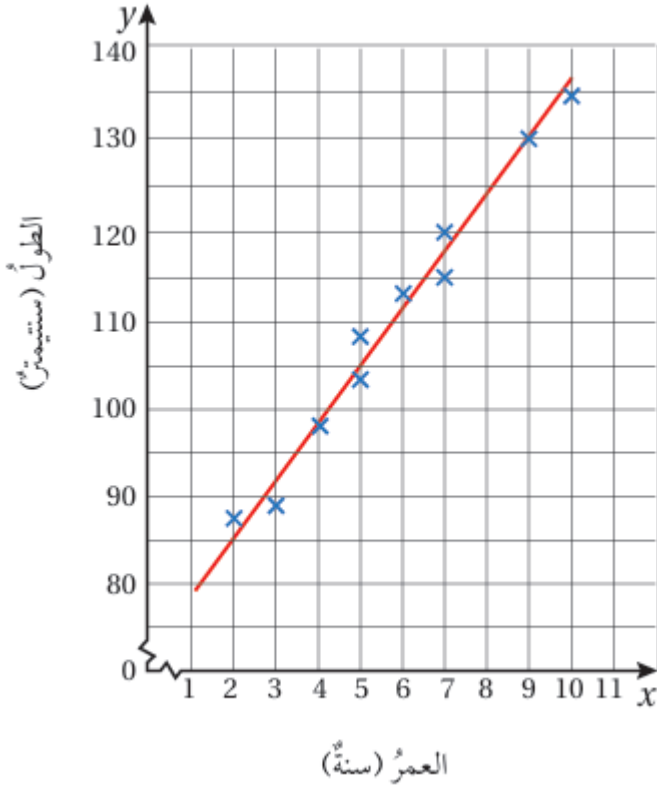


يُمثل شكل الانتشار المجاور الأزمنة المدونة لصاحب المركز الأول في سباق 100m للرجال في عدد من دورات الألعاب الأولمبية. أستعمل المستقيم الأفضل مطابقة المعطى في الشكل لتقدير الزمن الذي سيحققه صاحب المركز الأول في السباق للدورة التي ستقام عام 2020م.

هل يُمكن تقدير الزمن الذي سيحققه صاحب المركز الأول في السباق للدورة التي ستقام عام 2038م؟

أتحقق من فهمي

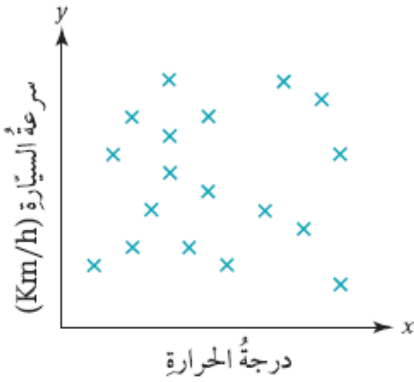
أستعمل المستقيم الأفضل مطابقة في الشكل المجاور لتقدير طول طفل عمره 8 سنوات. هل يُمكن استعمال هذا الشكل لتقدير طول شخص عمره 30 سنة ؟ أبرر إجابتي.



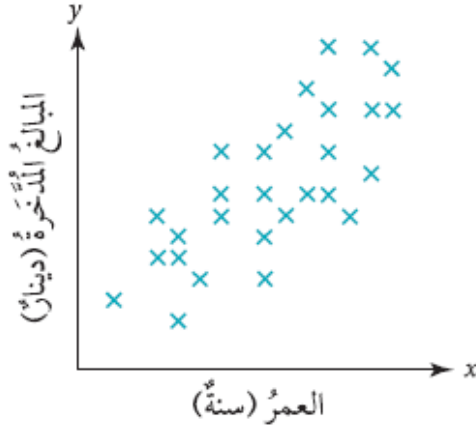
أدرب وأحل المسائل

أصف الارتباط في شكلي الانتشار الآتيين :

①



②



③ ماذا أستنتج من شكلي الانتشار السابقين ؟ أبرر إجابتي.

يُمثل الجدول الآتي العمر والطول والكتلة لسبع لاعبات من فريق كرة الطائرة في إحدى المدارس:

اسم اللاعبة	وفاء	هند	عائشة	هدى	تغريد	ابتسام	سميرة
العمر (سنة)	14	15	11	11	12	15	13
الطول (سنتيمتر)	169	168	154	158	162	165	161
الكتلة (كيلو غرام)	40	42	35	32	37	42	41

أرسم أشكال الانتشار، ثم أصف الارتباط لكل منها :

④ العمر مقابل الطول. ⑤ الطول مقابل الكتلة. ⑥ العمر مقابل الكتلة.

تجربة علمية : يُبين الجدول الآتي المسافة بالسنتيمتر، والسرعة بالسنتيمتر لكل ثانية، عند درجة كرة على سطح طاولة، بدءًا بنقطة محددة:

المسافة (cm)	10	20	30	40	50	60	70	80
السرعة (cm/s)	18	16	13	10	7	5	3	0

⑦ أرسم شكل الانتشار البيانات الجدول.

⑧ أرسم المستقيم الأفضل مطابقة للبيانات.

⑨ أقدر سرعة الكرة لحظة قطعها مسافة 5 cm من نقطة انطلاقها.

⑩ أقدر المسافة التي قطعها الكرة من نقطة انطلاقها عندما كانت سرعتها 12cm/s

لحل المسألة الواردة في بداية الدرس ، أجمع بيانات من 10 طلبة عشوائياً، ثم أدونها في الجدول الآتي،
ثم أجب عن الأسئلة التي تلي:

رقم الطالب	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
طول الطالب										
المسافة بين طرفي ذراعيه (cm)										

11) أرسم شكل الانتشار لبيانات الجدول.

12) أصف الارتباط بين المتغيرين.

13) هل ادعاء راكان صحيح ؟ أبرر إجابتي.

أطوال: يُبين الجدول الآتي أطوال 20 أبا وأبنائهم الذين تبلغ أعمارهم 20 سنة بالسنتيمتر :

طول الأب	178	186	164	152	169	174	183	147	162	153
طول الابن	168	163	152	145	151	167	167	142	155	145
طول الأب	156	180	162	166	173	181	168	158	173	175
طول الابن	152	160	150	156	164	170	154	160	167	172

14) أرسم شكل الانتشار لبيانات الجدول.

15) هل صحيح أن الأب الطويل ابنه طويل ؟ أبرر إجابتي.

16) أرسم المستقيم الأفضل مطابقة، ثم أجد معادلته.

في دراسة مسحية لمعلم عن عدد ساعات ممارسة الرياضة ومشاهدة التلفاز أسبوعياً شملت 20 طالباً في أحد الصفوف التي يُدرّسها، كانت نتيجة المسح كما في الجدول الآتي:

عدد ساعات ممارسة الرياضة	12	3	5	15	11	0	9	7	6	12
عدد ساعات مشاهدة التلفاز	18	26	24	16	19	27	12	13	17	14
عدد ساعات ممارسة الرياضة	12	10	7	6	7	3	1	2	0	12
عدد ساعات مشاهدة التلفاز	22	16	18	22	12	28	18	20	25	13

17) أرسم شكل الانتشار لبيانات الجدول.

18) إذا كان أحد الطلبة من الصف نفسه يُشاهد التلفاز مدة 8 ساعات أسبوعياً، فهل يُمكن تقدير عدد

الساعات التي يمارس فيها الرياضة أسبوعياً ؟ أبرر إجابتي.

سيارة أجرة: يبين الجدول الآتي المسافات المقطوعة بالكيلومتر والمدد الزمنية المُستغرقة بالدقائق لـ 10 رحلات قام بها سائق سيارة أجرة في أحد الأيام:

المسافة (km)	1.6	3.8	5.2	6.6	4.8	2.9	3.9	5.8	8.8	5.4
الزمن (min)	3	17	11	13	9	15	8	11	16	10

19) أرسم شكل الانتشار لبيانات الجدول، بوضع الزمن على المحور الأفقي.

20) أرسم المستقيم الأفضل مطابقة، ثم أجد معادلته.

21) إذا استغرقت إحدى الرحلات 5 دقائق، فما المسافة المقطوعة التي يُمكن تقديرها لهذه الرحلة؟

22) ما الزمن الذي يُمكن تقديره لرحلة قطع فيها السائق مسافة 4km؟

23) إذا استغرقت إحدى الرحلات ساعة كاملة، فما المسافة المقطوعة التي يمكن تقديرها لهذه الرحلة؟
أبرر إجابتي.

مهارات التفكير العليا

24) تبرير: يبين الجدول الآتي علامات 10 طالبات في اختباري الرياضيات والجغرافيا. إذا كانت إحدى الطالبات مريضة عند تقديمها اختبار الجغرافيا، فمن هي ؟ أبرر إجابتي.

الاسم	منى	فداء	علياء	سعاد	سارة	رقية	دعاء	تهاني	باسمة	إيمان
علامات اختبار الرياضيات	168	163	152	145	151	167	167	142	155	145
علامات اختبار الجغرافيا	156	180	162	166	173	181	168	158	173	175

25) أكتشف الخطأ: بالعودة إلى الجدول في السؤال السابق، لم تتقدم سميرة لاختبار الجغرافيا، وقد أحرزت علامة 75 في اختبار الرياضيات. قَدَّرْتُ سميرة أنها ستحصل على علامة 80 في اختبار الجغرافيا لو أنها قدمت. هل تقدير سميرة منطقي ؟ أبرر إجابتي.

26) مسألة مفتوحة: أختار متغيرين، ثم أنشئ جدولاً أنظم فيه بعض قيمهما، ثم أستعمله للتنبؤ بالقيمة الحقيقية لأحد المتغيرين باستعمال المستقيم الأفضل مطابقةً إذا عُلِمَتْ قيمة المتغير الآخر.

27) تبرير: لماذا يوصف الارتباط بأنه موجب في شكل الانتشار الذي يُمثل مبيعات أحد المحال من الثلجات على مدار أشهر السنة؟ هل يعني ذلك أن أحد المتغيرين (مبيعات الثلجات، أو أشهر السنة) سبب للآخر؟
أبرر إجابتي.

المنحني التكراري التراكمي

الدرس
الثاني

يمثل المنحني التكراري التراكمي (cumulative frequency graph) للبيانات المنظمة في جداول تكرارية ذات فئات العلاقة بين التكرار التراكمي للفئات في التوزيع التكراري والحدود العليا للفئات

مثال 1

يبين الجدول التكراري المجاور الزمن الذي يستغرقه طلبة الصف العاشر في الوصول إلى المدرسة. أرسم المنحني التكراري التراكمي للبيانات.

الزمن (دقيقة)	التكرار (عدد الطلبة)
$0 \leq x < 5$	2
$5 \leq x < 10$	9
$10 \leq x < 15$	9
$15 \leq x < 20$	8
$20 \leq x < 25$	3
$25 \leq x < 30$	1

المئين

هو قيمة أكبر من نسبة مئوية محددة من البيانات، فمثلاً؛ إذا حصلت في اختبار الحاسوب على درجة تساوي « المئين الأربعين»، فإن ذلك يعني أن درجتك أعلى من درجات 40% من الطلبة الذين تقدموا للاختبار، ويُرمز للمئين الأربعين بالرمز P_{40}

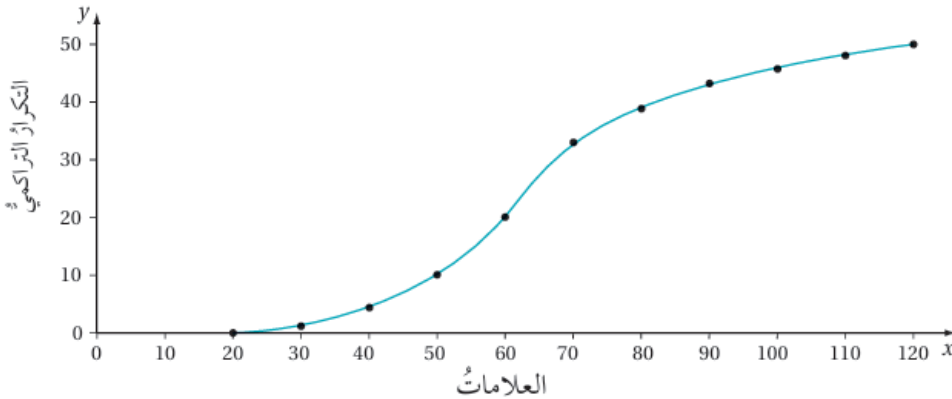
يُمكن تقدير قيم الربيعيات والمئينات للبيانات المنظمة في جداول تكرارية ذات فئات باستعمال المنحنى التكراري التراكمي.

أتعلم بما أن الربع الأدنى (Q_1) أكبر من ربع البيانات فإنه يساوي المئين الخامس والعشرين (P_{25}).
وهكذا فإن: $Q_1 = P_{25}$ ، $Q_2 = P_{50}$ ، $Q_3 = P_{75}$

مثال 2

يبين المنحنى التكراري التراكمي المجاور علامات 50 طالباً في اختبار اللغة العربية:

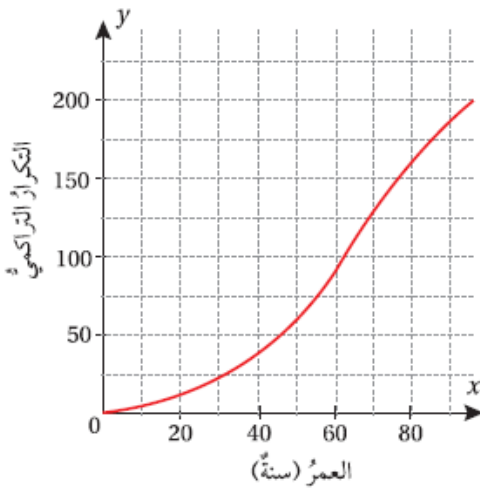
① أقدر وسيط البيانات.



② أجد المدى الربيعي.

③ أجد المنين 90، ثم أفسر معناه.

أتحقق من فهمي



يبين المنحنى التكراري التراكمي المجاور أعمار 200 عضو في جمعية ثقافية:

a) أقدر وسيط البيانات.

b) أجد المدى الربيعي.

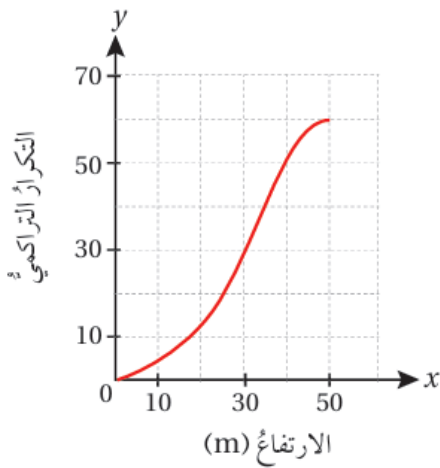
c) أجد المتين 85، ثم أفسر معناه.

أدرب وأحل المسائل

عدد الأهداف	عدد الطلبة
0 – 4	3
5 – 9	17
10 – 14	12
15 – 19	9
20 – 24	5
25 – 29	4

كرة قدم : يُبين الجدول المجاور عدد الأهداف التي سجلها طلبة المرحلة الثانوية في دوري كرة القدم المدرسي:

- ① أرسم المنحنى التكراري التراكمي.
- ② أقدّر المئين 85، ثم أفسر معناه.
- ③ أقدّر عدد الطلبة الذين سجلوا 18 هدفاً على الأقل.



يبين المنحنى التكراري التراكمي المجاور ارتفاع عدد من المباني في مدينة عمان:

- ④ أقدّر وسيط البيانات.
- ⑤ أجد المدى الربيعي.
- ⑥ أمثل البيانات باستعمال الصندوق ذي العارضتين.
- ⑦ أجد المئين 80، ثم أفسر معناه.

ألعاب: يُبين الجدول المجاور نتائج 80 متسابقاً في لعبة رمي السهام:

عدد المتسابقين	مجموع النقاط (x)
9	1 – 20
13	21 – 40
23	41 – 60
15	61 – 80
11	81 – 100
7	101 – 120
2	121 – 140

- ⑧ أرسم المنحنى التكراري التراكمي.
- ⑨ أجد قيمة كل من الوسيط، والمدى الربيعي.
- ⑩ إذا حصل المتسابق الذي مجموع نقاطه أكثر من 90 على جائزة، فما نسبة المتسابقين الذين سيحصلون على جائزة؟

طلب إلى 30 طالباً، و 50 معلماً رفع أيديهم لحظة تقدير انقضاء دقيقة واحدة بعد إعطاء إشارة البدء، وقد نظمت النتائج في الجدولين الآتيين:

عدد الطلبة	فئات الزمن (x) ثانية
1	$20 \leq x < 30$
3	$30 \leq x < 40$
6	$40 \leq x < 50$
12	$50 \leq x < 60$
3	$60 \leq x < 70$
3	$70 \leq x < 80$
2	$80 \leq x < 90$

عدد الطلبة	فئات الزمن (x) ثانية
1	$10 \leq x < 20$
2	$20 \leq x < 30$
2	$30 \leq x < 40$
9	$40 \leq x < 50$
17	$50 \leq x < 60$
13	$60 \leq x < 70$
3	$70 \leq x < 80$
2	$80 \leq x < 90$
1	$90 \leq x \leq 100$

11) أرسم المنحنى التكراري التراكمي لكل جدول.

12) أجد الوسيط والمدى الربيعي لكل جدول.

13) أي الفريقين كان أفضل في تقدير مدة الدقيقة: الطلبة أم المعلمون؟ أبرر إجابتي.

جامعات: يُبين الجدول المجاور مُعدلات عينة من طلبة كلية الهندسة في الجامعة الأردنية:

عدد الطلبة	المعدل التراكمي (x)
3	$1 \leq x < 1.5$
7	$1.5 \leq x < 2$
25	$2 \leq x < 2.5$
38	$2.5 \leq x < 3$
24	$3 \leq x < 3.5$
11	$3.5 \leq x < 4$

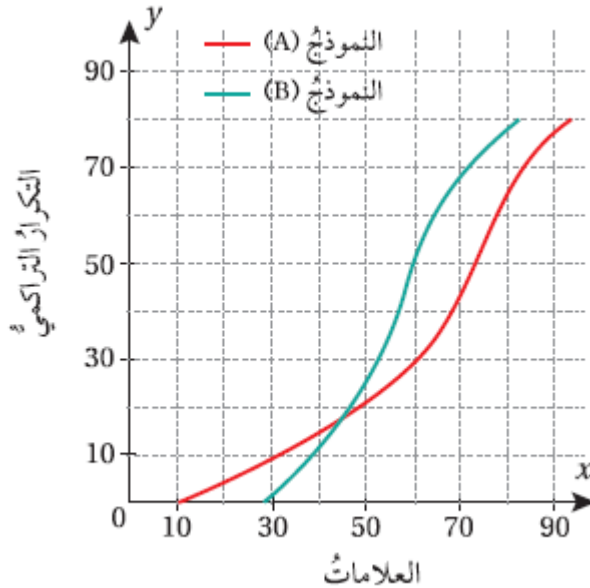
14) أرسم المنحنى التكراري التراكمي للبيانات.

15) أجد الوسيط والمدى الربيعي للبيانات.

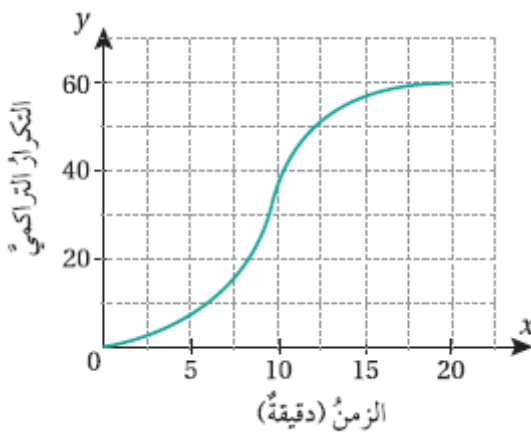
16) إذا كان الطلبة الذين تزيد معدلاتهم التراكمية على 3.4 قد حصلوا على منحة، فكم طالبا في هذه العينة لم يحصل على منحة؟

مهارات التفكير العليا .

17) تبرير: طلب معلم الرياضيات إلى طلبة الصف العاشر الإجابة عن أسئلة اختبار من نموذجين A ، و B ، ثم رسم المنحنى التراكمي التراكمي لنتائج الطلبة كما في الشكل المجاور. أي النموذجين كان أصعب A أم B ؟ أبرر إجابتني.



18) تحد: يبين الشكل المجاور المنحنى التراكمي التراكمي للمدة الزمنية التي استغرقتها 60 مكالمات هاتفية أجريت في أحد الأيام مع مقدم برنامج حوار في إحدى المحطات الإذاعية. أستعمل هذا التمثيل لتقدير النسبة المئوية للمكالمات التي استغرقت 10 دقائق على الأقل.



19) مسألة مفتوحة: أجمع بياناتي الخاصة بـ 30 مشاهدة، ثم أنظّمها في جدول تكراري، ثم أجدُ كلا من الوسيط، والمدى الربيعي لها.

أتحقق من فهمي

أجد التباين والانحراف المعياري لمجموعة البيانات الآتية: 3, 5, 12, 10, 15, 14, 11

بالرغم من أن الجداول التكرارية ذات الفئات لا تظهر فيها القيم الحقيقية للبيانات، فإنه يُمكن استعمالها لتقدير التباين والانحراف المعياري للبيانات؛ إذ يُمكن النظر إلى جميع قيم البيانات في فئة معينة على أساس أن كلا منها ممثلة بقيمة منتصف الفئة (مركز الفئة) x .

مفهوم أساسي الوسط الحسابي والتباين للبيانات ذات الفئات

لتقدير الوسط الحسابي للبيانات المنظمة في جداول تكرارية ذات فئات، أستخدم الصيغة الآتية:

$$\mu = \frac{\sum(x \times f)}{\sum f}$$

حيث :

f : التكرار المقابل للفئة

x : مركز الفئة.

لتقدير التباين للبيانات المنظمة في جداول تكرارية ذات فئات، أستخدم الصيغة الآتية:

$$\sigma^2 = \frac{\sum((x - \mu)^2 \times f)}{\sum f}$$

لتقدير الانحراف المعياري، أحد الجذر التربيعي للتباين.

مثال 2

عدد الرسائل	عدد الأيام
10 – 14	6
15 – 19	5
20 – 24	12
25 – 29	9
30 – 34	8

بريد إلكتروني : دونتْ سُهيَّةُ عدد رسائل البريد الإلكتروني اليومية التي وصلتها في 40 يوما، ونظمت بياناتها في الجدول التكراري المجاور. أقدر التباين لهذه البيانات.

أتحقق من فهمي

يُبيِّن الجدول المجاور توزيعاً لـ 200 سائق وفق أعمارهم، ممن تسببوا في حوادث مرورية خطيرة في إحدى المدن على مدار أسبوع. أقدر التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات.

فئات العمر (سنة)	عدد الأشخاص
$18 \leq x < 28$	100
$28 \leq x < 38$	50
$38 \leq x < 48$	26
$48 \leq x < 58$	18
$58 \leq x \leq 68$	6

توجد صيغة أخرى لتقدير التباين للبيانات المنظمة في جداول تكرارية ذات فئات، من دون حاجة إلى حساب انحرافات مراكز الفئات عن الوسط الحسابي، وهذه الصيغة هي:

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x^2 \times f)}{\sum f} - \mu^2$$

أتعلم يُفضل استعمال الصيغة المجاورة عندما يكون الوسط الحسابي عدداً غير صحيح.

مثال 3

عدد الأجزاء	عدد الحفاظ
6 – 8	15
9 – 11	10
12 – 14	25

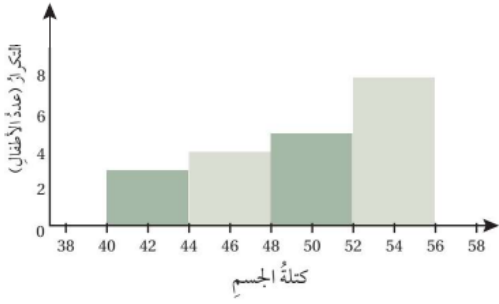
حفظ القرآن الكريم : يُبين الجدول المجاور توزيعاً لخمسين طالبا وفقاً لعدد الأجزاء التي يحفظونها من القرآن الكريم. أقدر التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات.

أتحقق من فهمي

أحل مسألة (بريد إلكتروني) التي وردت في المثال 2 باستعمال الصيغة الثانية لتقدير التباين، ثم أقارن قيمة التباين التي أتوصل إليها بالقيمة التي سبق حسابها.

يمكنني أيضاً تقدير مقاييس التشتت للبيانات الممثلة بمدرج تكراري، عن طريق إعادة تنظيمها في جدول ذي فئات وتكرار.

مثال 4



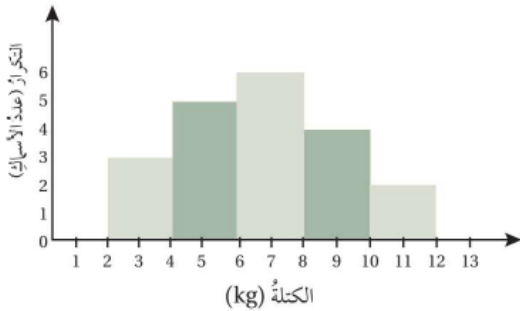
كتلة الجسم: يُبيّن التمثيل بالمدج التكراري المجاور توزيعاً لمجموعة أطفال من سن 10 سنوات وفق كتل أجسامهم مُقربة إلى أقرب كيلو غرام.

أقدر التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات.

أتحقق من فهمي

صيد بحري: يُبيّن التمثيل بالمدج التكراري المجاور توزيعاً لكتل مجموعة من الأسماك التي اصطادها أحد الصيادين في مدينة العقبة.

أقدر التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات.



أدرب وأحل المسائل

طباعة : يبين الجدول المجاور توزيعاً لأربعين طالبا في الصف العاشر بحسب عدد الكلمات التي يستطيعون طباعتها في جهاز الحاسوب في دقيقة واحدة:

عدد الطلبة	الفئات (عدد الكلمات في الدقيقة)
8	26 – 30
12	31 – 35
10	36 – 40
7	41 – 45
3	46 – 50

① أقدر الوسط الحسابي لهذه البيانات.

② أقدر التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات.

شقق سكنية: يُبين الجدول المجاور توزيعاً لـ 23 شقة سكنية - بحسب مساحتها - بنتها إحدى شركات الإسكان عام 2020م:

عدد الشقق	الفئات (المساحة m^2)
2	$80 \leq x < 100$
5	$100 \leq x < 120$
7	$120 \leq x < 140$
6	$140 \leq x < 160$
3	$160 \leq x \leq 180$

③ أقدر الوسط الحسابي لهذه البيانات.

④ أقدر التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات بطريقتين مختلفتين.

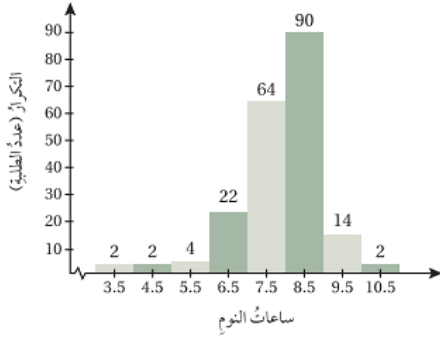
كرة سلة: يُبين الجدول المجاور توزيع اللاعبين في فريقين لكرة السلة وفق أطوالهم بالسنتيمتر:

فريق الأسود	فريق النسور	الطول (x)
2	3	$170 \leq x < 178$
3	1	$179 \leq x < 187$
3	4	$188 \leq x < 196$
2	2	$197 \leq x \leq 205$

⑤ أقدر التباين لأطوال اللاعبين في كل فريق.

⑥ أي الفريقين أكثر تجانسا من حيث أطوال اللاعبين ؟ أبرر إجابتي.

ساعات النوم: يُبين التمثيل بالمدرج التكراري المجاور توزيعاً لـ 200 طالب بحسب ساعات نومهم:

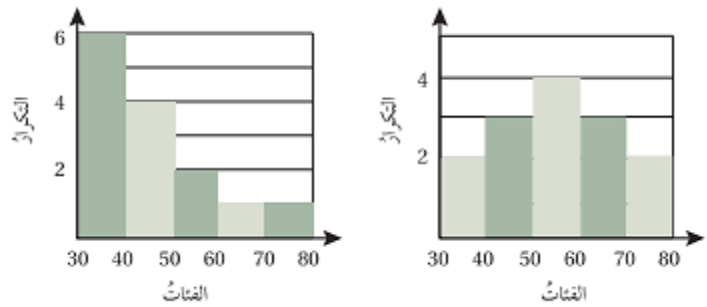


7) أقدر الوسط الحسابي لهذه البيانات.

8) أقدر التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات.

9) أصف توزيع هذه البيانات.

10) أقرن بين قيمتي التباين للبيانات الممثلة في الشكلين الآتيين مفسراً الاختلاف بينهما.



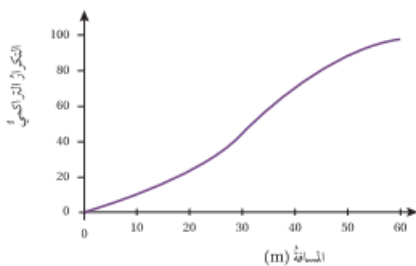
مهارات التفكير العليا

11) مسألة مفتوحة: أنظم البيانات الآتية في جدول تكراري (أختار طولاً مناسباً للفئات)، ثم أقدر قيمتي الوسط الحسابي والتباين، مستعملاً آلة حاسبة لإيجاد القيمة الدقيقة لكل منهما، ثم أقرن قيمتهما الدقيقة بالقيم التقديرية.

15	14	14	14	13	12	11	11	11	11
10	11	13	16	10	9	15	12	9	10
7	14	13	14	8	9	8	11	13	13
15	12	9	10	9	9	16	16	12	10
11	11	12	15	6	10	10	10	11	9

12) تبرير: في السؤال (11)، ما تأثير أطوال فترات الجدول التكراري الذي أنشأته في القيمة التقديرية للتباين؟ أبرر إجابتي.

13) تبرير: هل يمكن تقدير التباين للبيانات الممثلة في المنحنى التكراري التراكمي المجاور؟ أبرر إجابتي.



احتمالات الحوادث المتنافية

الدرس
الرابع

- يسمى الحادث الواحد (مثل وصول الباخرة الأولى في موعدها) الحادث البسيط ، أما الحادث المركب فيتكون من حادثين بسيطين أو أكثر، مثل وصول إحدى الباخرتين على الأقل في موعدها.
- إذا كان (A) و (B) حادثين في تجربة عشوائية، فإنهما يسميان حادثين متنافيين إذا تعذر وقوعهما معا في الوقت نفسه. ويقصد بالمتنافيين عدم وجود عناصر مشتركة بينهما.

مثال 1

أحد إذا كان الحادثان متنافيين أم لا ف ما يأتي، مبرر إجابتي:

- التجربة هي لعبة كرة القدم. الحادث الأول هو الفوز في المباراة. والحادث الثاني هو الخسارة.
- التجربة هي إلقاء حجر نرد منتظم. الحادثان هما الحصول على عدد زوجي، أو الحصول على عدد أقل من 3

أتحقق من فهمي

أحد إذا كان الحادثان متنافيين أم لا في ما يأتي، مبرراً إجابتي:

- التجربة هي سحب بطاقة واحدة عشوائياً من سلة فيها 5 بطاقات حمراء، و 3 بطاقات خضراء. الحادث الأول سحب بطاقة حمراء، والحادث الثاني سحب بطاقة خضراء.
- التجربة هي إلقاء حجر نرد منتظم. الحادث الأول هو الحصول على عدد فردي والثاني هو الحصول على عدد زوجي.

تعرفتُ سابقاً أن تقاطع حدثين في تجربة عشوائية يعني وقوعهما معا، ويُستدل على ذلك من أداة الربط (و: and) أو الرمز (\cap) ، وأن اتحاد حدثين يعني وقوع أحدهما على الأقل، ويُستدل على ذلك من أداة الربط (أو: or) أو الرمز (\cup) . فإذا كان (A) و (B) حدثين متنافيين، فإن احتمال وقوعهما معا $P(A \cap B)$ يساوي صفراً، واحتمال وقوع أحدهما على الأقل $P(A \cup B)$ يساوي مجموع احتمالي وقوعهما.

مفهوم أساسي احتمال الحدثين المتنافيين

بالكلمات: إذا كان (A) و (B) حدثين متنافيين في تجربة عشوائية، فإن احتمال وقوعهما معا يساوي صفراً، واحتمال وقوع أحدهما على الأقل يساوي مجموع احتمالي وقوعهما.

بالرموز: إذا كان (A) و (B) حدثين متنافيين، فإن:

$$P(A \text{ and } B) = P(A \cap B) = 0$$

$$P(A \text{ or } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

مثال 2

إذا كان الحدثان Z و Y متنافيين في تجربة عشوائية، وكان $P(Y) = 0.3$ و $P(Z) = 0.5$ فأجد كلا مما يأتي:

① $P(Y \cup Z)$

② $P(Y - Z)$

③ $P(\overline{Y \cup Z})$

أذكر

يعنى الحادث $Y - Z$ وقوع الحادث Y فقط ، وعدم وقوع الحادث Z ، ويمكن أيضا التعبير عنه بالرمز $Y \cap \bar{Z}$

احتمال وقوع متممة الحادث A هو 1 ناقص احتمال وقوع الحادث A ، $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

أتحقق من فهمي

إذا كان الحادثان (A) و (B) متنافيين في تجربة عشوائية، وكان $P(A) = \frac{1}{5}$ ، $P(B) = \frac{1}{4}$ ، فأجد كلاهما يأتي:

- Ⓐ $P(A \cap B)$ Ⓑ $P(B \cap \bar{A})$ Ⓒ $P(\overline{A \cup B})$

أحتاج في بعض المسائل إلى تحديد ما إذا كانت حوادث معينة متنافية أم لا، وذلك لإيجاد احتمالات مرتبطة بها.

مثال 3

في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرةً واحدةً، أجد ما يأتي:

① احتمال ظهور العدد 1، وظهور عدد زوجي.

② احتمال ظهور العدد 1، أو ظهور عدد زوجي.

أتذكر

لأي تجربة عشوائية احتمال وقوع الحادث البسيط E

أتحقق من فهمي

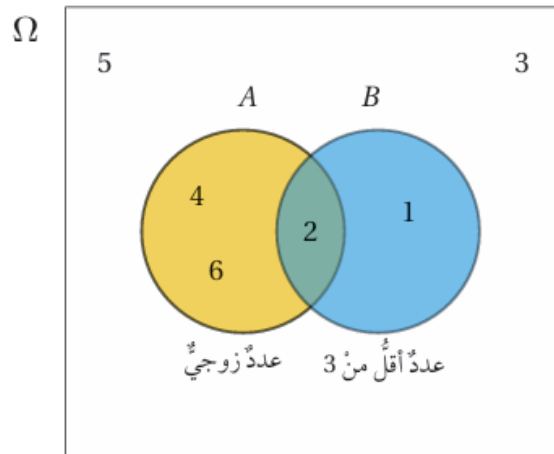
في تجربة اختيار عدد عشوائياً من بين الأعداد : 1,2,3,4,5,6,7,8، أجدُ

a) احتمال اختيار عدد أولي، ويقبل القسمة على 4

b) احتمال اختيار عدد أولي، أو عدد يقبل القسمة على 4

● لاحظت في المثال 1 أن حادثي الحصول على عدد زوجي أو عدد أقل من 3 عند إلقاء حجر نرد منتظم هما غير متنافيين؛ نظراً إلى وجود عنصر مشترك بينهما، هو العدد 2، وهذا العدد زوجي، وأقل من 3، فكيف أجد احتمال وقوع أحدهما على الأقل؟

● إذا كان (A) حادث الحصول على عدد زوجي، و (B) حادث الحصول على عدد أقل من 3 في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرةً واحدةً، فإنه يُمكن تمثيل هذين الحادثين باستعمال أشكال فن كما يأتي:



عند حساب احتمال كل حادث على حدة، أجد أن :

$$P(A) = \frac{3}{6}, P(B) = \frac{2}{6}$$

عند إيجاد احتمال وقوع أحد الحادتين على الأقل، وجمع هذين الاحتمالين، فإن احتمال العدد 2 سيتكرر؛ لأنه موجود في الحادتين (موجود في منطقة التقاطع بين الحادتين)، ولذلك يجب طرحه من مجموع الاحتمالين:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

مفهوم أساسي احتمال الحادتين غير المتنافيين

◀ **بالكلمات:** إذا كان (A) و (B) حادتين غير متنافيين في تجربة عشوائية، فإن احتمال وقوع أحدهما على الأقل يساوي مجموع احتماليهما مطروحا منه احتمال وقوع (A) و (B) معا.

◀ **بالرموز:** إذا كان (A) و (B) حادتين غير متنافيين، فإن:

$$P(A \text{ or } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مثال 4

يحتوي صندوق على 15 بطاقة مُرقمة من 1 إلى 15، إذا سُحِبَتْ بطاقة عشوائية، فُأجِدْ احتمال الحادتين الآتيتين:

① أن يكون العدد على البطاقة من مضاعفات العدد 3، ومن عوامل العدد 12

② أن يكون العدد على البطاقة من مضاعفات العدد 3، أو من عوامل العدد 12

أتحقق من فهمي

في تجربة اختيار عدد عشوائياً من المجموعة: $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ ، أجدُ:

- a) احتمال اختيار عدد أولي، ومن عوامل العدد 10
 b) احتمال اختيار عدد أولي، أو عدد من عوامل العدد 10

مثال 5

إذا كان (A) و (B) حادثين في تجربة عشوائية، وكان $P(A) = 0.65$, $P(B) = 0.75$, فأجد كلاهما يأتي:
 $P(A \cup B) = 0.85$

① $P(A \cap B)$

② $P(\bar{A})$

③ $P(\bar{A} \cap B)$

④ $P(\bar{A} \cup B)$

⑤ $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

أتحقق من فهمي

إذا كان A و B حدثين في تجربة عشوائية، وكان $P(A) = 0.5, P(B) = 0.3, (A \cap B) = 0.2$ ، فأجد كلا مما يأتي:

Ⓐ $(A \cup B)$

Ⓑ $P(\bar{B})$

Ⓒ $P(A - B)$

Ⓓ $P(A \cup \bar{B})$

Ⓔ $P(\bar{A} - \bar{B})$

أدرب وأحل المسائل

أحد إذا كان الحادثن متنافيين أم لا لكل تجربة عشوائية في ما يأتي، مبرراً إجابتي :

- ① ظهور العدد 3، أو ظهور عدد زوجي عند إلقاء حجر نرد منتظم مرةً واحدة.
 - ② ظهور أحد عوامل العدد 12 ، أو ظهور عدد أولي عند إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة.
 - ③ ظهور عددين مجموعهما 8 أو 12 عند إلقاء حجري نرد منتظم مرة واحدة.
- في تجربة اختيار بطاقة واحدة عشوائياً من 20 بطاقة متماثلة، كُتِبَ على كل منها عدد من 1 إلى 20، أجدُ :

- ④ احتمال اختيار عدد من مضاعفات العدد 7، ومن مضاعفات العدد 5
 - ⑤ احتمال اختيار عدد من مضاعفات العدد 7، أو من مضاعفات العدد 5
 - ⑥ احتمال اختيار عدد فردي، ويقبل القسمة على 4
 - ⑦ احتمال اختيار عدد فردي، أو يقبل القسمة على 4
- إذا كان الحادثن A و B حادثين متنافيين في تجربة عشوائية، وكان $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.25$ ، فأجد كلاهما يأتي:

$$\textcircled{8} P(A \cap B) \quad \textcircled{9} P(A \cup B) \quad \textcircled{10} P(\overline{A \cup B}) \quad \textcircled{11} P(A - B)$$

مجموعة من الكرات المتماثلة، مُرقمة من 1 إلى 21، وموضوعة داخل صندوق.

إذا اختيرت كرة من الصندوق عشوائياً، فأجدُ كلاهما يأتي:

⑫ احتمال أن تحمل الكرة عددا زوجياً.

⑬ احتمال أن تحمل الكرة عدداً من مضاعفات العدد 3

⑭ احتمال أن تحمل الكرة عدداً زوجياً، ومن مضاعفات العدد 3

⑮ احتمال أن تحمل الكرة عدداً زوجياً، أو من مضاعفات العدد 3

إذا كان A و B حادثين متنافيين في تجربة عشوائية، وكان $P(A \cap B) = 0.15$, $P(B) = 0.5$, $P(A) = 0.3$ ، فأوجد كلاهما يأتي :

$$\textcircled{16} P(A \cup B) \quad \textcircled{17} P(\bar{A}) \quad \textcircled{18} P(B - A) \quad \textcircled{19} P(A \cup \bar{B}) \quad \textcircled{20} P(\bar{A} \cup \bar{B})$$

رياضة : سُئل 60 رياضيا إذا كانوا يمارسون لعبة كرة القدم أو كرة السلة، وقد توزعوا وفق إجاباتهم كما في الجدول الآتي:

عدد الرياضيين	كرة القدم ، وكرة السلة	كرة القدم فقط	كرة السلة فقط	عدم ممارسة أي من اللعبتين
عدد الرياضيين	12	30	8	10

إذا اختير رياضي منهم عشوائيا، فأجد كلاهما يأتي:



21 احتمال أن يكون ممن يمارسون لعبتي كرة القدم وكرة السلة.

22 احتمال أن يكون ممن يمارسون لعبة كرة القدم، ولا يمارسون لعبة كرة السلة.

23 احتمال أن يكون ممن يمارسون لعبة كرة السلة، ولا يمارسون لعبة كرة القدم.

24 احتمال أن يكون ممن لا يمارسون لعبة كرة القدم، ولا يمارسون لعبة كرة السلة.

25 تجارة: أحل المسألة الواردة في بداية الدرس.

مهارات التفكير العليا

تحذ: إذا كان R و S حدثين في تجربة عشوائية، وكان $P(R \cup S) = 0.75$ ، فأجد كلاهما يأتي:

26 $P(R \cap S)$

27 $P(R)$

28 $P(\bar{S})$

29 $P(\bar{R} \cap \bar{S})$

30 تبرير: قال هاني: إن احتمال فوز فريقه المفضل هو 0.3، فرد عليه يزيد قائلا: إذن، احتمال خسارة الفريق هو 0.7، هل قول يزيد صحيح؟ أبرر إجابتي.

31 مسألة مفتوحة: أصف موقفين من حياتي اليومية، أحدهما يتضمن حدثين متنافيين، والآخر يتضمن حدثين غير متنافيين، مبينا كيف حددت ذلك.

احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة

الدرس
الخامس

❖ لأي تجربة عشوائية، يكون الحادثان (A) و (B) مستقلين إذا كان وقوع أحدهما (أو عدم وقوعه) لا يؤثر في احتمال وقوع (أو عدم وقوع) الآخر.

مفهوم أساسي احتمال الحادئين المستقلين

❖ **بالكلمات:** إذا كان (A) و (B) حادثين مستقلين في تجربة عشوائية ، فإن احتمال وقوعهما معا هو حاصل ضرب احتمال وقوع كل منهما.

❖ **بالرموز:** إذا كان (A) و (B) حادثين مستقلين، فإن:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

مثال 1

في تجربة إلقاء حجر نرد وقطعة نقد منتظمين عشوائيا معا مرة واحدة، أجد احتمال ظهور العدد 6 على حجر النرد والصورة على قطعة النقد.

أتحقق من فهمي

في تجربة إلقاء حجري نرد منتظمين عشوائيا معا مرة واحدة، أجد احتمال ظهور عدد فردي على حجر النرد الأول وعدد أكبر من 4 على حجر النرد الثاني.

❖ لأي تجربة عشوائية، يكون الحادثان (A) و (B) غير مستقلين (dependent) إذا أثر وقوع أحدهما في احتمال وقوع الآخر.

مثال 2

أحدد إذا كان الحادثان مستقلين أم لا في الحالات الآتية:

① سحب كرتين على التوالي عشوائياً من كيس فيه كرات متماثلة مختلفة الألوان، علماً بأن سحب الكرة الثانية كان بعد إرجاع الكرة الأولى إلى الكيس.

② سحب كرتين على التوالي عشوائياً من كيس فيه كرات متماثلة، وعدم إرجاع أي منهما إلى الكيس.

③ سحب كرة عشوائياً من كيس فيه كرات متماثلة حمراء وصفراء، ثم سحب كرة عشوائياً من كيس آخر فيه كرات متماثلة حمراء وصفراء.

أتحقق من فهمي

أحدد إذا كان الحادثان مستقلين أم لا في الحالات الآتية:

a) اختيار قطعة حلوى حمراء عشوائياً وأكلها، ثم اختيار قطعة حلوى حمراء أخرى عشوائياً من كيس يحوي 10 قطع حلوى حمراء و 25 قطعة حلوى زرقاء، جميعها متماثلة.

b) ظهور العدد 5 على حجري نرد ألقيا معا مرة واحدة عشوائياً.

c) سحب كرة حمراء عشوائياً من كيس فيه كرات متماثلة، 4 منها حمراء و 3 صفراء، ثم إعادتها إلى الكيس، ثم سحب كرة حمراء أخرى عشوائياً.

يساعد استعمال الشجرة الاحتمالية على حساب احتمالات الحوادث المستقلة وغير المستقلة.

مثال 3

يحتوي كيس على 5 كرات حمراء (R)، و 3 كرات خضراء (G)، جميعها متماثلة. سُجِبَتْ كرة من الكيس عشوائياً، ثم كتب لونها من دون إرجاعها إلى الكيس، ثم سُجِبَتْ كرة أخرى عشوائياً، ثم كتب لونها. أجدُ احتمال كل من الحوادث التالية باستعمال الشجرة الاحتمالية:

① سحب كرتين خضراوين.

② سحب كرة خضراء في المرة الأولى وكرة حمراء في المرة الثانية.

③ سحب كرتين، إحداهما خضراء، والأخرى حمراء.

أتحقق من فهمي

يحتوي كيس على 6 قطع حلوى حمراء (R)، و 8 قطع حلوى خضراء (G)، جميعها متماثلة. اختار طفل من الكيس قطعة حلوى عشوائياً وأكلها. ثم اختار قطعة أخرى عشوائياً ليأكلها. أجدُ احتمال كل من الحادثين الآتيين باستعمال الشجرة الاحتمالية:

a) اختيار الطفل قطعتي حلوى متماثلتي اللون.

b) اختيار الطفل قطعتي حلوى مختلفتي اللون.

ألاحظ في المثال السابق أن احتمال سحب كرة خضراء في المرة الأولى وكرة حمراء في المرة الثانية يساوي احتمال سحب كرة خضراء في المرة الأولى مضروباً في احتمال سحب كرة حمراء في المرة الثانية، علماً بأن كرة خضراء سُحِبَتْ في المرة الأولى.

مفهوم أساسي احتمال الحادّين غير المستقلين

بالكلمات: احتمال وقوع حادثين غير مستقلين معاً يساوي احتمال وقوع الحادث الأول مضروباً في احتمال وقوع الحادث الثاني بعد وقوع الحادث الأول.

بالرموز: إذا كان (A) و (B) حادثين غير مستقلين في تجربة عشوائية ما، فإن:

$$P(A \text{ and } B) = P(A) \times P(B|A)$$

يقرأ الرمز $P(B|A)$: احتمال وقوع الحادث (B) شرط وقوع الحادث (A) ؛ لذا يسمى الاحتمال المشروط (conditional probability)، ويُمكن إيجاده باستعمال الصيغة الآتية:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, P(A) \neq 0$$

4

مثال

ألقي حجر نرد منتظم عشوائياً مرة واحدة. ما احتمال ظهور العدد 6 إذا كان العدد الظاهر زوجياً؟

أتحقّق من فهمي

ألقي حجر نرد منتظم عشوائياً مرة واحدة. ما احتمال ظهور عدد أكبر من 3 إذا كان العدد الظاهر زوجياً؟

في كثير من الأحيان، تعرض البيانات لفتتين من الأشياء باستعمال ما يُسمى جداول الاتجاهين، وهي جداول تتيح إيجاد الاحتمال المشروط على نحو سهل.

مثال 5

تدوير: يُبين الجدول المجاور كتل النفايات التي جمعت بالأطنان في يومين من إحدى المدن. إذا سُجِبَتْ عينة عشوائية منها قبل البدء بإعادة تدويرها، فما احتمال أن تكون العينة ورقية، علماً بأنها جُمِعَتْ يوم الأحد؟

	ورقية	غير ورقية
السبت	7	94
الأحد	8	121

أتحقق من فهمي

إذا سُجِبَتْ عينة عشوائية، فما احتمال أن تكون غير ورقية، علماً بأنها جُمِعَتْ يوم السبت؟

ملخص المفاهيم

القانون	الوصف	نوع الحوادث
$P(A \cap B) = 0$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$	لا يوجد بينهما عناصر مشتركة.	المتنافيان
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	يوجد بينهما عناصر مشتركة.	غير المتنافيين
$P(A) + P(\bar{A}) = 1$	لا يوجد بينهما عناصر مشتركة، واتحادهما معا يمثل فضاء العينة.	المتتامان
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$	وقوع أحدهما لا يؤثر في احتمال وقوع الآخر.	المستقلان
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B A)$	وقوع أحدهما يؤثر في احتمال وقوع الآخر.	غير المستقلين
$P(B A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, P(A) \neq 0$	وجود معلومة إضافية عن وقوع أحدهما.	المشروطة

أدرب وأحل المسائل

كرات زجاجية : يحتوي كيس على 5 كرات حمراء (R)، و3 كرات خضراء (G)، وكرتين صفراوين (Y)، جميعها متماثلة. سحبت كرة من الكيس عشوائيا، ثم كتب لونها، ثم أعيدت إلى الكيس، ثم سُحِبَت كرة أخرى عشوائيا، ثم كتب لونها :

① ما احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والثانية صفراء؟

② ما احتمال أن تكون الكرتان خضراوين؟

أحدد إذا كان الحادثان مستقلين أو غير مستقلين في كل من التجارب العشوائية الآتية:

③ سحب كرة زرقاء عشوائيا من صندوق، والحصول على العدد 5 عند إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة.

④ اختيار طالب من مواليد شهر 10 عشوائيا ليخرج من غرفة الصف، ثم اختيار طالب آخر عشوائيا من مواليد شهر 5 ليلحق به.

⑤ الحصول على عدد زوجي عند إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة، وعدد يقبل القسمة على 2 عند إلقاء حجر نرد آخر منتظم.

⑥ إصابة صيادين الهدف الثابت الذي أطلق كل منهما طلقة واحدة نحوه عشوائيا.

⑦ سحب بطاقة عشوائية تحمل العدد 6 من مجموعة بطاقات متماثلة تحمل الأرقام من 1 إلى 10، ثم إعادتها، ثم سحب بطاقة أخرى عشوائية تحمل عددا زوجيا.

أقلام حبر: في علبة قلما حبر أحمر، وثلاثة أقلام حبر أزرق، جميعها متماثلة. اختار سالم منها قلمين عشوائيا على التوالي من دون إرجاع. أجد احتمال كل من الحوادث الآتية باستعمال الشجرة الاحتمالية:

⑧ اختيار قلمي حبر أحمر.

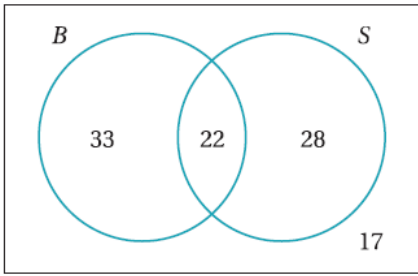
⑨ اختيار قلمي حبر أزرق.

⑩ اختيار قلم حبر من كل لون

اختبارات: تقدم سامي للاختبارين في الرياضيات، وكان احتمال نجاحه في الأول %75، واحتمال نجاحه في الثاني إذا نجح في الأول %80، واحتمال رسوبه في الثاني إذا رسب في الأول %60، فأجد كلا مما يأتي :

⑪ احتمال نجاح سامي في كلا الاختبارين.

⑫ احتمال نجاح سامي في أحد الاختبارين، ورسوبه في الآخر.



سيل 100 شخص عن وجود أخ لهم أو أخت، وقد توزعوا وفق إجاباتهم كما في شكل المجاور، حيث:

B : الأشخاص الذين لكل منهم أخ.

S : الأشخاص الذين لكل منهم أخت.

إذا اختبر أحد هؤلاء الأشخاص عشوائياً، فما احتمال:

⑬ أن يكون له أخ؟

⑭ أن يكون له أخ، علماً بأن له أختاً؟

⑮ أن يكون له أخت، علماً بأن له أختاً؟

وظائف: يُبين الجدول المجاور أعداد المتقدمين لوظيفة في إحدى الشركات، ومؤهلاتهم العلمية، وخبراتهم السابقة.

		لديه خبرة سابقة	
		نعم	لا
لديه شهادة جامعية	نعم	54	27
	لا	5	4

إذا اختير أحد المتقدمين للوظيفة عشوائياً، فما احتمال:

⑯ أن يكون لديه خبرة سابقة، علماً بأن لديه شهادة جامعية؟

⑰ ألا يكون لديه شهادة جامعية، علماً بأن لديه خبرة سابقة؟

إشارات مرور: تمر عادة في رحلة عودتها من العمل بشارع رئيس عليه إشارتان ضوئيتان. إذا كان احتمال أن تصل الإشارة الأولى، وتجتازها وهي مضاءة باللون الأخضر G هو 0.3، وإذا كانت مضاءة بالأحمر R ، فإن احتمال وصولها الإشارة الثانية وهي مضاءة بالأحمر هو 0.8، أما إذا كانت الإشارة الأولى مضاءة بالأخضر، فإن احتمال وصولها الإشارة الثانية وهي مضاءة بالأحمر هو 0.4

أستعمل التمثيل بالشجرة الاحتمالية لإيجاد كل من الاحتمالات الآتية:

⑱ احتمال وصولها كلا من الإشارتين وهما مضاءتان بالأحمر.

⑲ احتمال وصولها كلا من الإشارتين وهما مضاءتان بالأخضر.

⑳ احتمال وصولها إحدى الإشارتين وهي مضاءة بالأخضر، ووصولها الإشارة الأخرى وهي مضاءة بالأحمر.

أرصاد جوية: أفادت مذيعة النشرة الجوية أن احتمال تساقط الثلوج يوم الإثنين هي 25%، وأنها ترتفع إلى 90% يوم الثلاثاء. أستمحل التمثيل بالشجرة الاحتمالية لإيجاد احتمال:

②1 تساقط الثلوج يوم الثلاثاء، وعدم تساقطها يوم الإثنين.

②2 عدم تساقط الثلوج في كلا اليومين.

②3 تساقط الثلوج في أحد اليومين على الأقل.

صيد: أطلق صياد طلقة واحدة على هدف ثابت، وأطلق آخر طلقة واحدة على الهدف نفسه. إذا كان احتمال إصابة الأول للهدف 70%، واحتمال إصابة الثاني للهدف 60%، فأجد احتمال:

②4 إصابة كلا الصيادين الهدف.

②5 عدم إصابتها الهدف.

②6 إصابة الصياد الثاني الهدف، علما بأن الصياد الأول أصاب الهدف.

②7 عدم إصابة الصياد الثاني الهدف، علما بأن الصياد الأول لم يُصب الهدف.

مهارات التفكير العليا.

②8 تبرير: إذا كان (A) و (B) حادثين متنافيين في تجربة عشوائية، فما قيمة $P(A|B)$ ؟ أبرر إجابتي.

②9 تبرير: قالت تماضر: إنّه لأي حادثين (A) و (B) في فضاء العينة 12 لتجربة عشوائية ما، فإن:

$$P(A|B) = P(B|A)$$

هل قول تماضر صحيح؟ أبرر إجابتي.

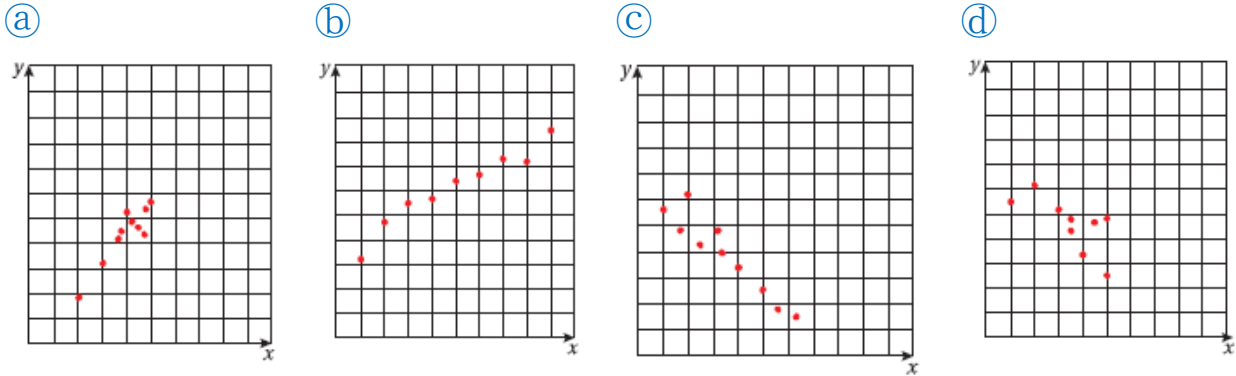
③0 تحد: يحتوي كيس على n من الكرات المتماثلة مختلفة الألوان. إذا كان احتمال سحب كرة حمراء ثم سحب كرة خضراء من دون إرجاع 2.4% تقريبا، فما قيمة n ؟

③1 مسألة مفتوحة: أذكر مثلا على حادثين مستقلين، ومثالا آخر على حادثين غير مستقلين، مبينا كيف أجد احتمال وقوع الحادثين معا في كل مثال.

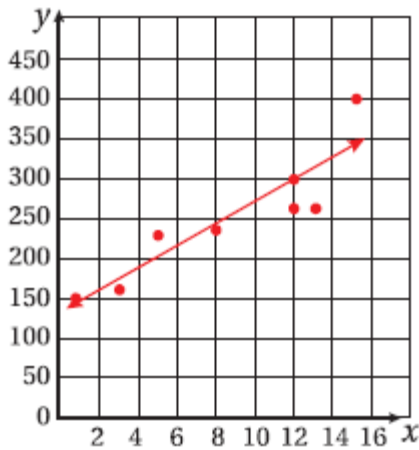
اختبار نهاية الوحدة

أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في ما يأتي:

① شكل الانتشار الذي يُظهر الارتباط الموجب الأقوى بين (x) و (y) هو :



② باستعمال المستقيم الأفضل مطابقة في الشكل الآتي، تقدير قيمة y عندما $x = 7$ هو :



(a) 150

(b) 175

(c) 200

(d) 225

③ قيمة المدى الربيعي للقيم: 4,7,6,9,13,12,15,10,7,8,10,5,11 هي:

(a) 5

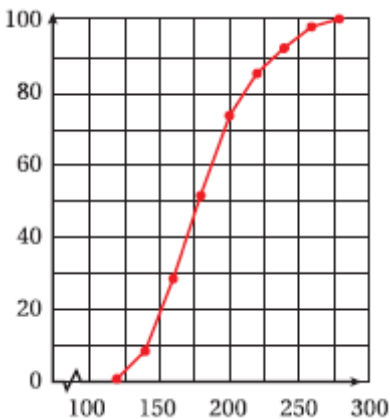
(b) 6

(c) 9

(d) 11

④ رسائل بريدية : يبين الشكل الآتي المنحنى التكراري التراكمي لكتلة 100 رسالة (بالغرام) مسجلة لدى

أحد مكاتب البريد. قيمة الربع الأعلى لكتل الرسائل هي:



(a) 160

(b) 200

(c) 210

(d) 230

٥ في الجدول الآتي، إذا كان مجموع مربعات انحرافات مراكز الفئات عن الوسط الحسابي في التكرار المقابل لها هو 324، فإن قيمة التباين هي :

التكرار	الفئات
7	$5 \leq x < 10$
12	$10 \leq x < 15$
6	$15 \leq x < 20$

- ٦ حبرا نرد: ألقى حجرا نرد منتظمان، أحدهما أحمر، والآخر أزرق عشوائيا مرة واحدة. احتمال ظهور عدد أولي على حجر النرد الأحمر، وعدد أقل من 3 على حجر النرد الأزرق هو :

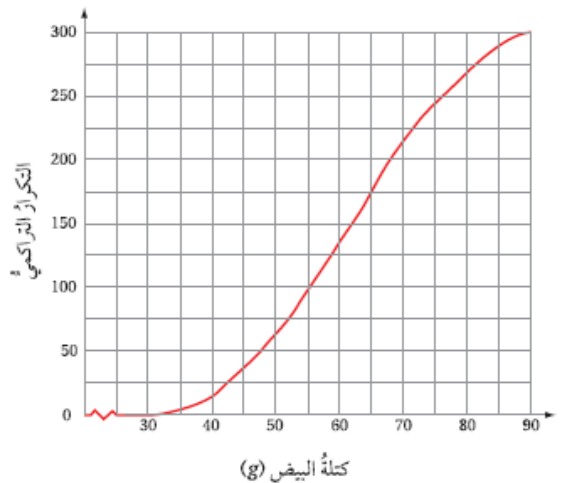
- ٧ إذا كان A و B حدثين في تجربة عشوائية، وكان $P(A) = 0.3, P(B) = 0.6, P(A \cap B) = 0.1$ فأوجد كلاهما يأتي:

- ٨ $P(A \cup B)$
 ٩ $P(B - A)$
 ١٠ $P(A \cup \bar{B})$
 ١١ $P(\bar{A} \cup \bar{B})$

التكرار	كتلة البيضة (x)
15	$30 \leq x < 40$
48	$40 \leq x < 50$
72	$50 \leq x < 60$
81	$60 \leq x < 70$
54	$70 \leq x < 80$
30	$80 \leq x \leq 90$

زراعة: دون مهندس زراعي كتلة 300 بيضة بالفراغ كما في الجدول الآتي:

بين التمثيل الآتي المنحنى التكراري التراكمي لهذا الجدول:



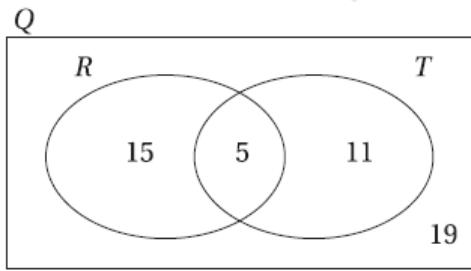
أستعمل المنحنى التكراري التراكمي لإيجاد:

- ⑫ قيمة الوسيط لكتل البيض، مفسرا دلالاته.
- ⑬ قيمة المدى الربيعي لكتل البيض، مفسرا دلالاته.
- ⑭ قيمة المئين 80 لكتل البيض، مفسرا دلالاته.
- ⑮ عدد البيض الذي تزيد كتلته على 65 g
- ⑯ يُمثل الجدول الآتي كمية الأمطار في إحدى مناطق المملكة على مدار 20 عاما لأقرب مليمتراً :

كمية الأمطار	عدد السنوات
$199 \leq x < 249$	2
$249 \leq x < 299$	3
$299 \leq x < 349$	6
$349 \leq x < 399$	3
$399 \leq x < 449$	4
$449 \leq x \leq 499$	2

أجد التباين والانحراف المعياري لكمية الأمطار.

سيارات: يُبين شكل قن الآتي عدد السيارات الحمراء R ، وعدد السيارات ذات البابين T ، وعدد سيارات أخرى في أحد مواقف السيارات Q :



إذا اختيرت سيارة عشوائياً، فما احتمال:

⑰ أن تكون حمراء، وذات بايين؟

⑱ ألا تكون حمراء، ولها بابان؟

⑲ إذا اختيرت سيارة، وكانت ذات بايين، فما احتمال ألا تكون حمراء؟

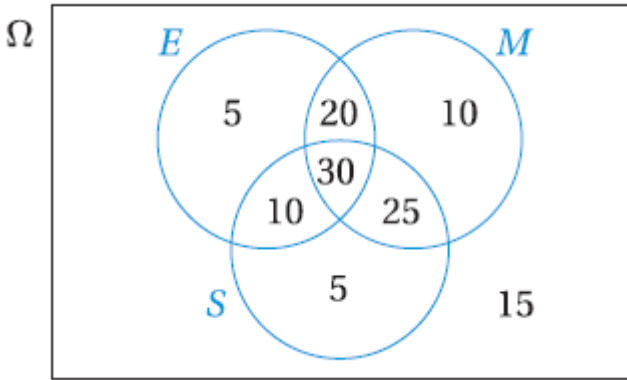
⑳ إذا اختيرت سيارتان، الواحدة تلو الأخرى عشوائياً، فما احتمال أن يكون لونهما أحمر؟

كرات ملونة: يحتوي كيس على كرتين سوداوين، وكرة بيضاء. إذا كانت جميع الكرات متماثلة، وسحب مصعب كرة عشوائياً، ثم كتب لونها، ثم أعادها إلى الكيس، ثم سحب أخرى عشوائياً، ثم كتب لونها، فأستعمل التمثيل بالشجرة الاحتمالية لإيجاد الاحتمالات الآتية:

㉑ الكرتان المسحوبتان بيضاوان

㉒ الكرتان المسحوبتان مختلفتا اللون

٢٣) إحدى الكرتين المسحوبتين على الأقل لونها أسود.



تقدم 120 طالباً لاختبارات في اللغة الإنجليزية (E)، والرياضيات (M)، والعلوم (S)، وقد توزعوا وفق نجاحهم في هذه الاختبارات كما في شكل فن الآتي:

إذا اختير أحد هؤلاء الطلبة عشوائياً، فما احتمال:

٢٤) أن يكون ناجحاً في العلوم، علماً بأنه ناجح في

الرياضيات؟

٢٥) أن يكون ناجحاً في اللغة الإنجليزية، علماً بأنه ناجح في الرياضيات؟

٢٦) ألا يكون ناجحاً في العلوم، علماً بأنه ليس ناجحاً في الرياضيات؟

تدريب على الاختبارات الدولية

لون العينين: يُبين الجدول الآتي احتمال أن يكون الشخص في مجتمع ما ذا عينين زرقاوين، أو بُنيتين، أو خضراوين:

لون العينين	زرقاوان	بنيتان	خضراوان
الاحتمال	0.4	0.5	0.1

إذا اختير شخصان عشوائياً، فما احتمال:

٢٧) أن تكون عينا كل منهما زرقاوين؟

٢٨) أن تكون عينا كل منهما مختلفتي اللون؟

أقلام ملونة: يحتوي صندوق على 3 أقلام حمراء R ، وقلمين زرقاوين B ، و4 أقلام خضراء G . اختارت شيما قلمين عشوائياً من الصندوق على التوالي، ومن دون إرجاع، ما احتمال:

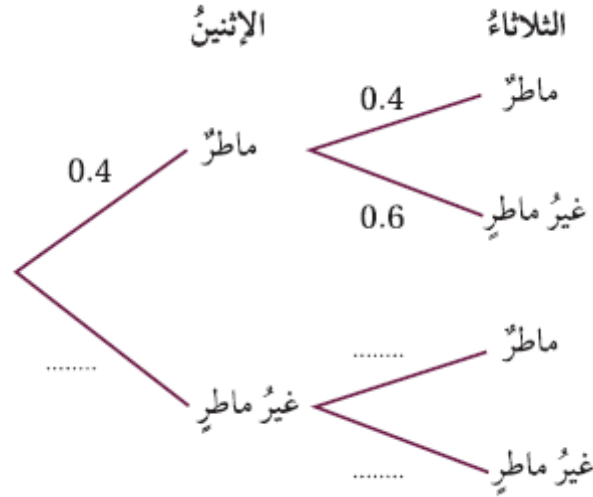
٢٩) أن يكون لون القلمين أحمر؟

٣٠) أن يكون للقلمين اللون نفسه؟

٣١) أن يكون لون أحد القلمين فقط أخضر؟

أمطار: إذا نزل المطر اليوم، فإن احتمال نزوله غدًا هو 0.4 وإذا لم ينزل اليوم، فإن احتمال نزوله غدًا هو 0.2. نزل المطر يوم الأحد:

32) أكمل الفراغ في الشكل الآتي:



33) أجد احتمال نزول المطر في يوم واحد على الأقل من اليومين الواردين في الشكل.